ThS. VÕ GIANG GIAI

CÁC CHỦ ĐỀ
HÌNH HỌC
11

(TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM)

- Giới thiệu đề thi Olympic 30 - 4 và đề toán trên tạp chí "Toán học và tuổi trẻ"
- Biên soạn theo chương trình SGK mới
- Ôn thi Đại học và Olympic Toán

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

ThS. VÕ GIANG GIAI

CÁC CHỦ ĐỀ

HÌNH HỌC

11

(Tự luận & trắc nghiệm)

- Giới thiệu các đề thi đại học, Olympic 30 – 4 và các bài toán hay trên tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ".
- Bài tập căn bản, nâng cao và trắc nghiệm.
- Ôn thi Đại học và Olympic Toán.

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Lời nói đầu

Cuốn sách "***Các chủ đề Hình học 11***" được tác giả biên soạn dựa theo sách giáo khoa Hình học 11 xuất bản năm 2007 của nhà Xuất Bản Giáo Dục, bao gồm bốn chương:

• *Mỗi chương 1, 2, 3 trình bày theo 4 mục:*

+ Tóm tắt giáo khoa.

+ Bài tập căn bản.

+ Bài tập nâng cao.

+ Các bài tập trắc nghiệm ôn tập cuối chương.

• *Chương 4 được trình bày theo 2 mục:*

+ Giới thiệu các đề thi Đại học và Cao đẳng từ năm 2000 đến 2007.

+ Bài tập trắc nghiệm ôn tập cuối năm.

Sách được biên soạn cập nhật, hệ thống chi tiết và đầy đủ các kiến thức căn bản. Hầu hết các bài tập đều được lược trích từ các đề thi Đại học, đề thi Olympic 30 – 4 và đề toán trên tạp chí "*Toán học và Tuổi trẻ*" gần nhất, vì vậy sách rất phù hợp cho các học sinh tự học ở nhà, ôn luyện thi đại học và thi học sinh giỏi.

Tác giả chân thành cảm ơn sự góp ý của các em học sinh và đồng nghiệp để lần tái bản sau cuốn sách sẽ được hoàn thiện hơn.

Tác giả

Chương I.

PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG TRONG MẶT PHẲNG

A/ TÓM TẮT GIÁO KHOA

§1. PHÉP DỜI HÌNH

1. Đại cương về phép biến hình

Định nghĩa 1:

Phép biến hình là một quy tắc để với mỗi điểm M của mặt phẳng, xác định được duy nhất điểm M' thuộc mặt phẳng ấy. Điểm M' gọi là ảnh của điểm M qua phép biến hình đó.

- Nếu ta ký hiệu một phép biến hình nào đó là F và điểm M' là ảnh của M qua phép biến hình F thì ta viết M' = F(M) hoặc F(M) = M'. Khi đó, ta còn nói phép biến hình F biến điểm M thành điểm M'.
- Nếu $\mathcal{H}$ là một hình nào đó thì hình $\mathcal{H}'$ (gồm các điểm M' là ảnh của các điểm M thuộc $\mathcal{H}$) được gọi là ảnh của H qua phép biến hình F, và viết là $\mathcal{H}' = F(\mathcal{H})$.

2. Phép dời hình

Định nghĩa 2:

Phép dời hình là một phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kỳ, tức là với bất kỳ hai điểm M, N và ảnh M', N' (tương ứng) của chúng, ta luôn có M'N' = MN.

Định lý:

Phép dời hình biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng, ba điểm không thẳng hàng thành ba điểm không thẳng hàng.

Hệ quả:

Phép dời hình biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn bằng nó, biến góc thành góc bằng nó.

§2. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

Định nghĩa 1.

Phép đối xứng qua đường thẳng d là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua đường thẳng d.

- Phép đối xứng qua đường thẳng d được ký hiệu là $Đ_d$.
- Phép đối xứng qua đường thẳng d còn gọi là phép đối xứng trục.

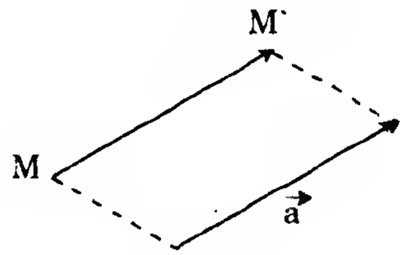
Định lý: Phép đối xứng trục là một phép dời hình.

Định nghĩa 2:

Đường thẳng d được gọi là trục đối xứng của một hình $\mathcal{H}$ nếu phép đối xứng trục $Đ_d$ biến hình $\mathcal{H}$ thành chính nó, tức là $Đ_d(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$.

§3. PHÉP TỊNH TIẾN

Định nghĩa



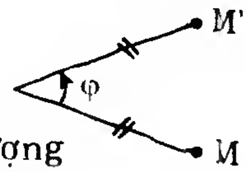
Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{a}$ là một phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$

- Ký hiệu phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{a}$ là $T_{\vec{a}}$.
- Khi $\vec{a} = \vec{0}$, phép tịnh tiến trở thành phép đồng nhất.

§4. PHÉP QUAY VÀ PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

1. Phép quay

Định nghĩa 1:



Trong mặt phẳng cho điểm O cố định và góc lượng giác φ không đổi. Phép biến hình biến điểm O thành điểm O, biến mỗi điểm M (khác O) thành điểm M' sao cho OM = OM' và $(\widehat{OM, OM'}) = \varphi$ được gọi là phép quay tâm O với góc quay φ.

- Ký hiệu phép quay tâm O với giá trị quay φ là Q(O; φ).
- Nếu $\varphi = k.360^0$, $k \in Z$ thì phép quay trở thành phép đồng nhất.

Định lý: Phép quay là một phép dời hình.

2. Phép đối xứng tâm

Định nghĩa 2:

Phép đối xứng qua điểm, O là một phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' đối xứng với M qua O, có nghĩa là $\vec{OM} + \vec{OM'} = \vec{0}$

- Phép đối xứng qua điểm O, ký hiệu là $Đ_O$.
- Phép đối xứng qua điểm O còn gọi là phép đối xứng tâm O.
- Điểm O còn gọi là tâm đối xứng.

Chú ý: Nếu góc quay $\varphi = 180^0$ thì phép quay chính là phép đối xứng tâm.

Định nghĩa 3:

Điểm O được gọi là tâm đối xứng của một hình $\mathcal{H}$ nên phép đối xứng tâm $Đ_O$ biến hình $\mathcal{H}$ thành chính nó, tức là $Đ_O(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$.

§5. HAI HÌNH BẰNG NHAU

Định lý:

Nếu ABC và A'B'C' là hai tam giác bằng nhau thì có một phép dời hình biến tam giác ABC thành tam giác A'B'C'.

Định nghĩa

Hai hình gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

§6. PHÉP VỊ TỰ

1. Định nghĩa

Cho điểm O cố định và một số thực $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thanh điểm M' sao cho $\vec{OM'} = k\vec{OM}$ được là phép vị tự tâm O tỷ số k.

- Ký hiệu phép vị tự tâm O tỷ số k là V(O; k)

Chú ý: Nếu tỷ số k = −1 thì phép vị tự chính là phép đối xứng tâm.

2. Các định lý

Định lý 1: Nếu phép vị tự tỷ số k biến hai điểm M và N lần lượt thành hai điểm M' và N' thì $\overline{M'N'} = k\overline{MN}$

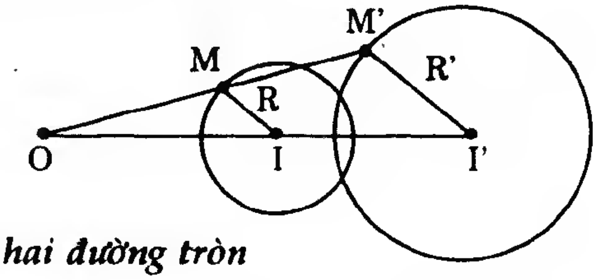
Định lý 2: Phép vị tự biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không thay đổi thứ tự của ba điểm thẳng hàng đó.

Hệ quả:

Phép vị tự tỷ số k biến đường thẳng thành đường thẳng song song (hoặc trùng) với đường thẳng đó, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với $|k|$, biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỷ số đồng dạng là $|k|$, biến góc thành góc bằng nó.

Định lý 3: (ảnh của đường tròn qua phép vị tự)

Phép vị tự tỷ số k, biến đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính $R' = |k|.R$.



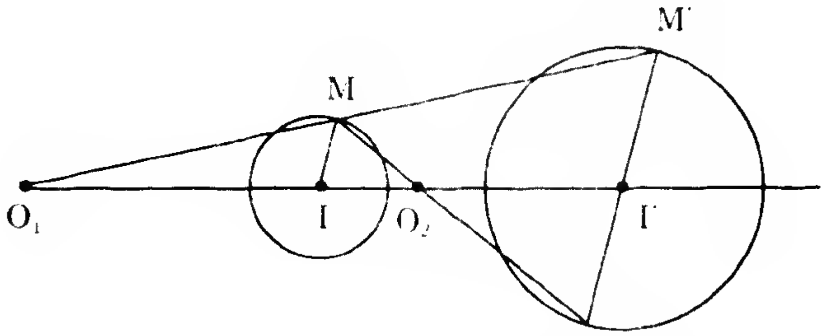
3. Tâm vị tự của hai đường tròn

Cho hai đường tròn (I, R) và (I', R'). Ta cần tìm các phép vị tự biến đường tròn (I, R) thành đường tròn (I', R').

Quả vậy:

- Kẻ đường thẳng II'
- Trên (I, R) lấy M, trên (I', R') lấy hai điểm M'_1 và M'_2 sao cho $\overline{IM}$ cùng hướng với $I'M'_1$ và trái hướng với $\overline{I'M'_2}$
- Gọi O_1, O_2 lần lượt là giao điểm của II' với MM'_1, MM'_2.

Trường hợp 1: Nếu $I \neq I'$ và $R \neq R'$ thì cả hai điểm O_1, O_2 đều tồn tại.

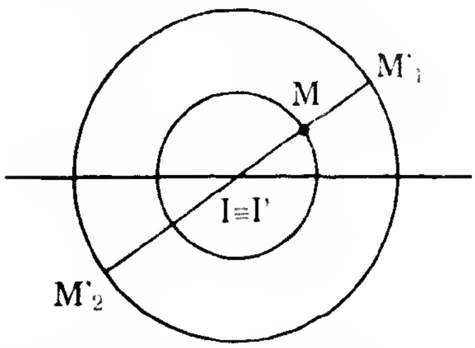


Khi đó các phép vị tự $V'_2(O_1; \frac{R'}{R})$, $V(O_2; -\frac{R'}{R})$ đều biến (I, R) thành (I', R').

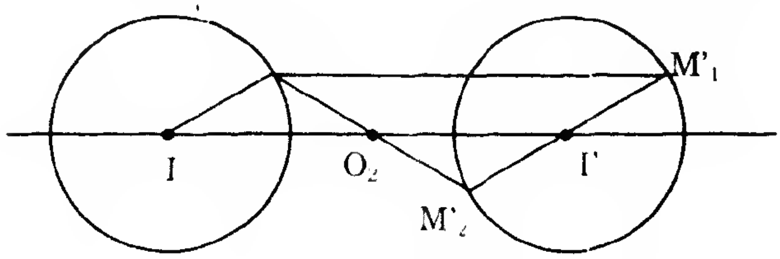
Chú ý: Tâm của phép vị tự V(O; k) biến đường tròn này thành đường tròn kia, gọi là tâm vị tự của hai đường tròn. Đặc biệt:

- Nếu phép vị tự V(O; k) có k > 0 thì O gọi là tâm vị tự ngoài.
- Nếu phép vị tự V(k; O) có k < 0 thì O' gọi là tâm vị tự trong.

Trường hợp 2: Nếu I ≡ I' và R ≠ R' thì I vừa là tâm vị tự ngoài, vừa là tâm vị tự trong.



Trường hợp 3: Nếu I ≢ I' và R = R' thì tâm vị tự ngoài không tồn tại và tâm vị tự trong là trung điểm đoạn II'.



§7. PHÉP ĐỒNG DẠNG

Định nghĩa 1:

Phép biến hình F gọi là phép đồng dạng tỷ số k ($k > 0$) nếu với hai điểm M và N bất kỳ và ảnh M' và N' của chúng, ta luôn có $M'N' = kMN$

Chú ý: • Phép vị tự tỷ số $k > 0$ chính là phép đồng dạng.

• Phép dời hình chính là phép đồng dạng với tỷ số $k = 1$.

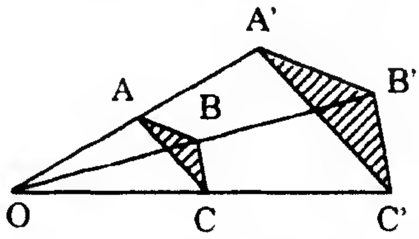
Định lý:

Mọi phép đồng dạng F tỷ số k ($k > 0$) đều là hợp thành của một phép vị tự V tỷ số k và một phép dời hình D.

Hệ quả:

Phép đồng dạng biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng (và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó), biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng. mà độ dài được nhân lên với k (với k là tỷ số của phép đồng dạng, biến tam giác thành tam giác đồng dạng tỷ số k, biến đường tròn có bán kính R thành đường tròn có bán kính $R' = kR$, biến góc thành góc bằng nó.

Định nghĩa 2: (hai hình đồng dạng)



Hai hình gọi là đồng dạng với nhau nếu có phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

B/ BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Cho F là một phép dời hình biến ΔABC thành $\Delta A'B'C'$. Chứng minh rằng (qua phép dời hình F)

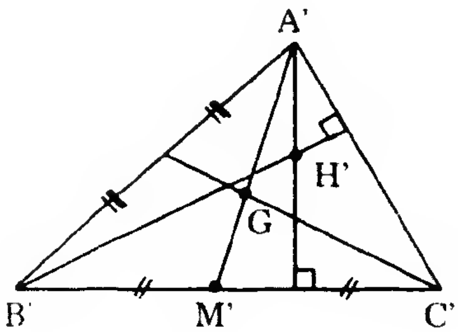
a) Trọng tâm G của ΔABC biến thành trọng tâm G' của $\Delta A'B'C'$.

b) Trực tâm H của ΔABC biến thành trực tâm H' của $\Delta A'B'C'$.

c) Tâm O của đường tròn ngoại tiếp ΔABC biến thành tâm O' của đường tròn ngoại tiếp $\Delta A'B'C'$

Giải

a) Gọi M là trung điểm BC, G là trọng tâm ΔABC, $M' = F(M)$ và $G' = F(G)$.



Khi đó $\begin{cases} M' \in B'C' \\ B'M' = BH \\ C'M' = CM \\ G' \in A'M' \\ G'M' = GM \\ G'A' = GA \\ A'M' = AM \end{cases}$

Hơn nữa $\begin{cases} GM = \dfrac{1}{3}AM \\ GA = \dfrac{2}{3}AM \\ BM = CM \end{cases}$

Nên $\begin{cases} \text{M là trung điểm BC} \\ G' \in A'M' \\ G'M' = \dfrac{1}{3}A'M' \\ G'A' = \dfrac{2}{3}A'M' \end{cases}$

Vậy có trọng tâm $\Delta A'B'C'$

b) Gọi $H' = F(H)$

Do $AH \perp BC$ nên $\quad A'H' \perp B'C'$

Chứng minh tương tự $\quad B'H' \perp A'C'$

Vậy H' là trực tâm $\Delta A'B'C'$

c) Gọi $O' = F(O)$

Khi đó: $\begin{cases} O'A' = OA \\ O'B' = OB \\ O'C' = OC \end{cases}$

Mà OA = OB = OC

Nên: O'A' = O'B' = O'C'

Vậy O' là tâm đường tròn ngoại tiếp $\Delta A'B'C'$.

Bài 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, xét phép biến hình f biến mỗi điểm M(x, y) thành điểm M'(y – x). Chứng minh rằng đây là phép dời hình.

Giải

Lấy hai điểm bất kỳ $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$ thì ảnh của chúng qua phép biến hình f lần lượt là $M'(y_1 - x_1)$, $N'(y_2 - x_2)$. Khi đó:

$$\begin{cases} MN = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ M'N' = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (-x_2 + x_1)^2} \end{cases}$$

Suy ra M'N' = MN

Vậy f là phép dời hình.

Bài 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho phép biến hình F biến điểm M(x, y) thành điểm M'(x', y') sao cho $\begin{cases} x' = ax + by + p \\ y' = cx + dy + q \end{cases}$, trong đó $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$, $ab + cd = 0$

Chứng minh rằng F là phép dời hình.

Giải

Lấy hai điểm bất kỳ $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$ thì ảnh của chúng qua phép biến hình F lần lượt là $M'(ax_1 + by_1 + p, cx_1 + dy_1 + q)$, $N'(ax_2 + by_2 + p, cx_2 + dy_2 + q)$. Khi đó:

$$MN^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\begin{aligned} M'N'^2 &= [a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1)]^2 + [c(x_2 - x_1)^2 + d(y_2 - y_1)]^2 \\ &= (a^2 + c^2)(x_2 - x_1)^2 + (b^2 + d^2)(y_2 - y_1)^2 \\ &\quad + 2(ab + cd)(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) \\ &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \end{aligned}$$

Vậy: M'N' = MN, tức là F là phép dời hình.

Bài 4. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm M(1, 3). Trên tọa độ điểm M' là ảnh của M qua phép đối xứng trục Oy, rồi tìm tọa điểm M" là anh cua M' qua phép đối xứng trục Ox.

Giải

• $Đ_{Oy}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = -1 \\ y' = 3 \end{cases}$

$\Rightarrow M'(-1, 3)$

• $Đ_{Ox}(M') = M'' \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = x' \\ y'' = -y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'' = -1 \\ y'' = -3 \end{cases}$

$\Rightarrow M''(-1, -3)$.

Bài 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng có phương trình $\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{3}$. Hãy viết phương trình đường thẳng d' là ảnh của d qua phép đối xứng trục Oy.

Giải

Biểu thức tọa độ cua phép đối xứng qua trục Oy:

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = y' \end{cases}$$

Khi đó d: $\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{3}$

Biến thành d': $\frac{-x'+2}{2} = \frac{y'-1}{3}$

$\Leftrightarrow -3x' + 6 = 2y' - 2$

$\Leftrightarrow 3x' + 2y' - 8 = 0$

Vậy ảnh của phương trình d qua phép đối xứng trục Oy là đường thẳng d' có phương trình là $3x + 2y - 8 = 0$.

Bài 6. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn (O) có phương trình là $(x + 1000)^2 + (y - 2000)^2 = 2008$. Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của đường tròn (C) qua phép đối xứng trục Ox.

Giải

Biểu thức tọa độ của phép đối xứng qua trục Ox:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}$$

Khi đó (C): $(x + 1000)^2 + (y - 2000)^2 = 2008$

Biến thành (C'): $(x' + 1000)^2 + (-y' - 2000)^2 = 2008$

$\Leftrightarrow (x' + 1000)^2 + (y' + 2000)^2 = 2008$

Vậy ảnh của đường tròn (C) qua phép đối xứng trục Ox là đường tròn (C') có phương trình là $(x + 1000)^2 + (y + 2000)^2 = 2008$.

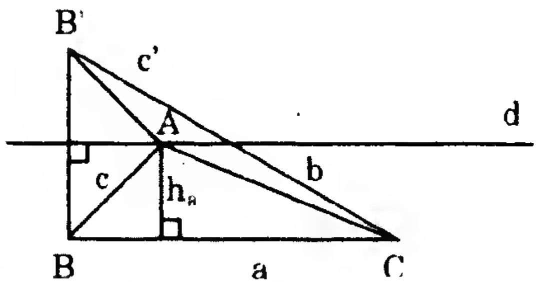
Bài 7. Cho ΔABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $2p = a + b + c$ và h_a, h_b, h_c là độ dài các đường cao xuất phát từ A, B, C tương ứng. Chứng minh rằng:

a) $h_a \le \sqrt{p(p - a)}$

b) $h_a + h_b + h_c \le \sqrt{3}\,p$.

Giải

a)



Gọi d là đường thẳng qua A và song song với BC.

Xét phép đối $Đ_d$: $B \xrightarrow{Đ_d} B'$

$A \xrightarrow{Đ_d} A$

Theo tính chất của phép đối xứng, ta có $AB' = AB$

Vì vậy: $b + c = AB + AC = AB' + AC \ge B'C$

$\Leftrightarrow \quad b + c \ge \sqrt{a^2 + 4h_a^2}$

$\Leftrightarrow \quad (b + c)^2 \ge a^2 + 4h_a^2$

$\Leftrightarrow \quad h_a^2 \le \dfrac{1}{4}[(b + c)^2 - a^2] = p(p - a)$

$\Leftrightarrow \quad h_a \le \sqrt{p(p - a)}$

Dấu "=" ⇔ O, A, B' thẳng hàng

⇔ ΔABC cân tại A.

b) Theo bất đẳng thức Bunhicopski:

$$(h_a + h_b + h_c)^2 \le 3(h_a^2 + h_b^2 + h_c^2) \le 3p(p - a + p - b + p - c)$$

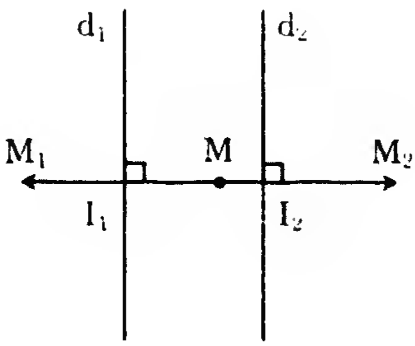
$\Rightarrow h_a + h_b + h_c \le \sqrt{3}.p$

Dấu "=" ⇔ ΔABC đều.

Bài 8. Cho hai đường thẳng song song d_1 và d_2.

Gọi $Đ_1$ và $Đ_2$ lần lượt là các phép đối xứng qua trục d_1 và d_2. Với M là điểm bất kỳ, giả sử $Đ_1(M) = M_1$, $Đ_2(M_1) = M_2$. Chứng minh rằng phép biến hình biến điểm M thành M_2 là phép tịnh tiến.

Giải



Gọi I_1, I_2 lần lượt là giao điểm của M_1M_2 với d_1, d_2.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{MM_1} = 2\overrightarrow{MI_1} = -2\overrightarrow{M_1I_1} \\ \overrightarrow{M_1M_2} = 2\overrightarrow{M_1I_2} \end{cases}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = 2(\overrightarrow{M_1I_2} - \overrightarrow{M_1I_1})$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{MM_2} = 2\overrightarrow{I_1I_2} = \vec{v}$

$\Rightarrow$ Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = 2\overrightarrow{I_1I_2}$ biến M thành M_2.

Bài 9. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, biết đường thẳng d cắt trục Ox tại điểm A(–2, 0) và cắt trục Oy tại B(0, 3). Hãy viết phương trình tham số của đường thẳng d' là ảnh của d qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v} = (-4, 1)$

Giải

Giả sử $T_{\vec v}(A) = A'$, $T_{\vec v}(B) = B'$

Khi đó: $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \vec{v} = (-4, 1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_{A'} + 2, y_{A'}) = (-4, 1) \\ (x_{B'}, y_{B'} - 3) = (-4, 1) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A'(-6, 1) \\ B'(-4, 4) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = (2, 3)$

Vì $T_{\vec{v}}(d) = d' \Rightarrow d'$ đi qua A', B'

Vậy phương trình tham số của d' là

$$\begin{cases} x = -6 + 2t \\ y = 1 + 3t \end{cases} \quad (t \in R).$$

Bài 10. Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho parabol (P) có phương trình $y = ax^2$ $(a \neq 0)$. Gọi T là phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (1, 1)$ và (P') là ảnh của (P) qua phép tịnh tiến trên. Hãy viết phương trình của (P').

Giải

Biểu thức tọa độ của phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$

$$\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' - 1 \end{cases}$$

Khi đó (P): $y = ax^2$

Biến thành (P'): $y' - 1 = a(x' - 1)^2$

$\Leftrightarrow y' = ax'^2 - 2ax' + a + 1$

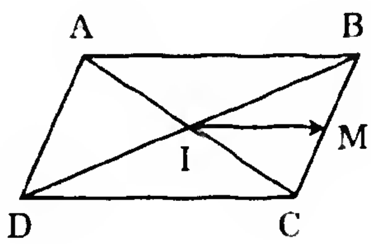
Vậy ảnh của (P) qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{v}$ là (P') có phương trình là $y = ax^2 - 2ax + a + 1$.

Bài 11. Cho hình bình hành ABCD, hai điểm A, B cố định, tâm I thay đổi trên một đường tròn (O). Tìm quỹ tích trung điểm M của cạnh BC.

Giải

Ta có: $\overrightarrow{IM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

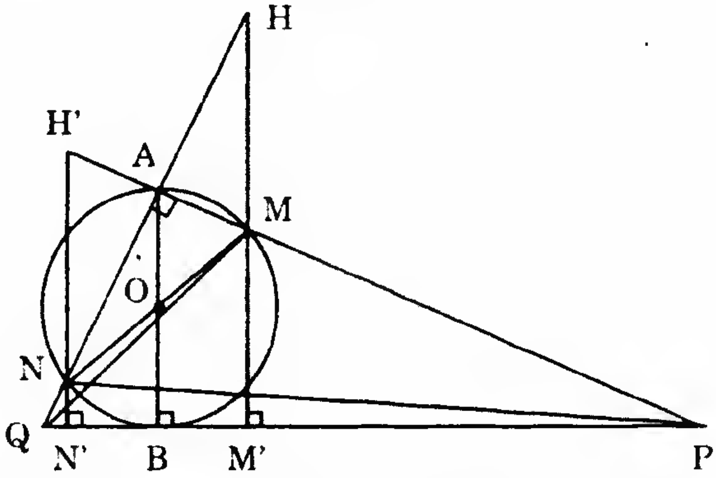
Khi đó M là ảnh của I qua phép tịnh tiến $T_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}$



Vậy quỹ tích của M là ảnh của đường tròn (O) trong phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Bài 12. Cho đường tròn (O) với đường kính AB cố định, một đường kính MN thay đổi. Các đường thẳng AM và AN cắt tiếp tuyến của (O) tại B lần lượt là P và Q. Tìm quỹ tích các trực tâm của các tam giác MPQ và NPQ.

Giải



a) ΔMPQ có QA là đường cao (vì $QA \perp AP$)

Kẻ $MM' \perp PQ$ tại M'

Khi đó trực tâm H của ΔMPQ chính là giao điểm của QA và MM'.

Hơn nữa $\overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BA}$

Suy ra, phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{BA}$ biến M thành H

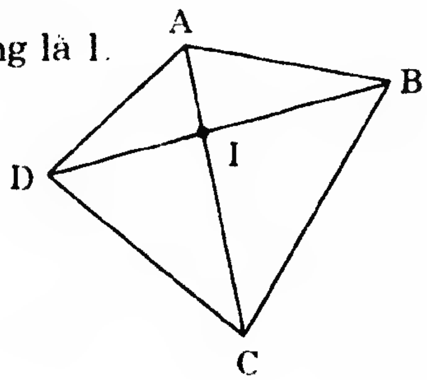
Vậy, quỹ tích H là ảnh của đường tròn (O) qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BA}}$.

b) Chứng minh tương tự, quỹ tích H' (trực tâm ΔNPQ) cũng là ảnh của đường tròn (O) qua phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BA}}$.

Bài 13. Chứng minh rằng một tứ giác lồi có tâm đối xứng thì nó phải là hình bình hành.

Giải

Giả sử tứ giác lồi ABCD có tâm đối xứng là I.



Khi đó, đỉnh A chỉ có thể biến thành đỉnh O và đỉnh B chỉ có thể biến thành đỉnh D. Vì vậy I chính là trung điểm của mỗi đường chéo AC và BD, điều này chứng tỏ ABCD là hình bình hành.

Bài 14. Cho hai điểm B, C cố định trên đường tròn (O) và một điểm A thay đổi trên đường tròn này. Tìm quỹ tích trực tâm H của ΔABC.

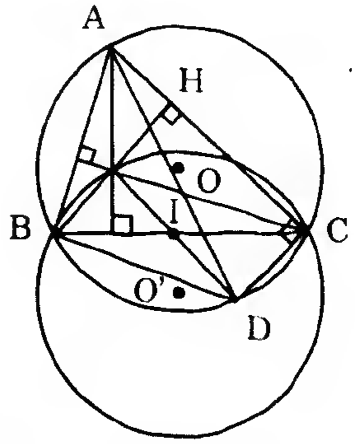
Giải

Kẻ AD đường kính của đường tròn (O)

Ta có: $\left.\begin{array}{l} DC \perp AC \ (\text{Do } \widehat{ACD} = 90^0) \\ BH \perp AC \ (\text{Do BH là đường cao}) \end{array}\right\} \Rightarrow DC \parallel BH$.

Chứng minh tương tự

$DB \parallel CH$



Từ đó suy ra, BDCH là hình bình hành

$\Leftrightarrow$ Hai đường chéo BC và DH cắt nhau tại I trung điểm mỗi đường.

$\Rightarrow \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IH} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ H là ảnh của D qua phép đối xứng tâm I

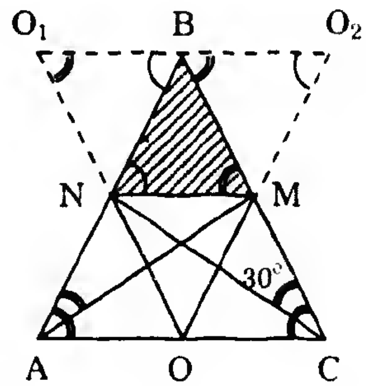
Vậy quỹ tích trực tâm H của ΔABC là đường tròn (O') là ảnh của đường tròn (O) qua phép đối xứng tâm I.

Bài 15. Cho ΔABC có AM và CN là hai trung tuyến. Chứng minh rằng: Nếu $\widehat{BAM} = \widehat{BCN} = 30^0$ thì ΔABC đều.

Giải

Tứ giác ACMN có $\widehat{NAM} = \widehat{NCM} = 30^0$ nên nội tiếp trong một đường tròn (O, R)

Và $\widehat{MON} = 2\widehat{NAM} = 60^0$



Xét các phép đối xứng tâm M và N:

$A \xrightarrow{Đ_N} B$

$(O) \xrightarrow{Đ_N} (O_1)$

thì $A \in (O)$ và $B \in (O_1)$

$C \xrightarrow{Đ_M} B$

$(O) \xrightarrow{Đ_M} (O_2)$

thì $C \in (O)$ và $B \in (O_2)$

Khi đó $\left.\begin{array}{l} OO_1 = OO_2 = 2R \\ \widehat{MON} = 60^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta OO_1O_2$ đều

$\Rightarrow O_1B + O_2B = R + R = 2R = O_1O_2$

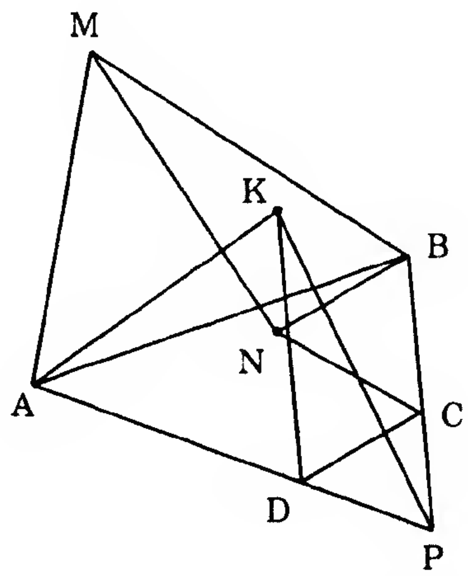
$\Rightarrow$ B trung điểm O_1O_2

$\Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta O_2OO_1$ (vì cùng $\backsim \Delta NBM$)

$\Rightarrow \Delta ABC$ đều.

Bài 16. Cho tứ giác lồi ABCD. Trên các cạnh AB và CD về phía ngoài ta dựng các tam giác đều ABM và CDP. Trên hai cạnh còn lại, về phía trong tứ giác, ta dựng các tam giác đều BCN và ABK. Chứng minh rằng: MN = PK

Giải



Từ giả thiết, ta có:

+ Phép quay Q(B; 60^0) biến M thành A và N thành C. Suy ra MN = AC

+ Phép quay Q(D; 60^0) biến P thành C và K thành A. Suy ra P'K = AC

Vậy: MN = PK

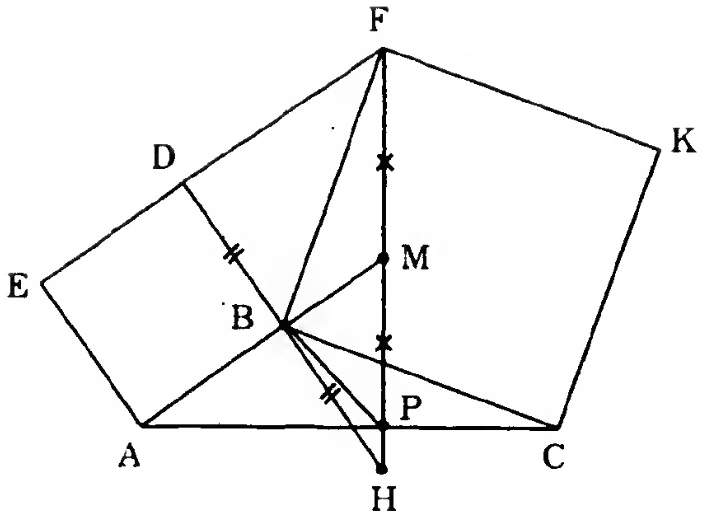
Bài 17. Cho ΔABC có các đỉnh được ký hiệu theo hướng âm, dựng ở ngoài tam giác này hai hình vuông ABDE và BCKF. Gọi P là trung điểm cạnh AC, H là điểm đối xứng của D qua B, M là trung điểm đoạn FH.

a) Xác định ảnh của hai vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{AC}$ trong phép quay tâm, góc 90^0.

b) Chứng minh rằng: DF = 2BP và BP $\perp$ DF

Giải

a) Ta có: $\begin{cases} BA = BH \\ (\overline{BA, BH}) = 90^0 \end{cases}$



$$A \xrightarrow{Q(B;\,90^0)} H \qquad (1)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BA} \xrightarrow{Q(B;90^0)} \overrightarrow{BH}$$

Hơn nữa: $C \xrightarrow{Q(B;\,90^0)} F \qquad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \overrightarrow{AC} \xrightarrow{Q(B;90^0)} \overrightarrow{HF}$

b) Ta có P là trung điểm của đoạn AC nên theo tính chất của phép quay ta có ảnh của P qua phép quay $Q(B;\,90^0)$ (ở trên) là trung điểm M của đoạn HF. Do đó:

$$\overrightarrow{BP} \xrightarrow{Q(B;\,90^0)} \overrightarrow{BM}$$

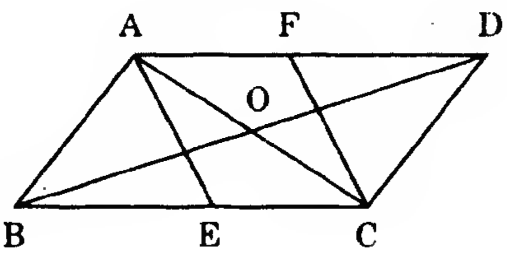
$$\Rightarrow \begin{cases} BP = BM \\ BP \perp BM \end{cases}$$

Mặt khác $BM = \frac{1}{2}DF$ và BM // DF (tính chất đường trung bình trong ΔHDF)

Vì vậy: DF = 2BP và DF $\perp$ DF.

Bài 18. Cho hình bình hành ABCD. Lấy E trên cạnh BC rồi vẽ CF song song với AB, F nằm trên AD. Hãy chỉ ra phép dời hình biến hình thang ABCF thành hình thang CDAE.

Giải



Gọi O là tâm hình bình hành ABCD

Ta có: $A \xrightarrow{Đ_O} C$

$B \xrightarrow{Đ_O} D$

$C \xrightarrow{Đ_O} A$

$F \xrightarrow{Đ_O} E$

Vậy phép dời hình $Đ_O$ biến hình thang ABCF thành hình thang CDAE.

Bài 19. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC; H, G, O lần lượt là trực tâm, trọng tâm và tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC, I là tâm đường tròn (MNP).

a) Chứng minh rằng ΔMNP là ảnh của ΔABC trong phép vị tự tâm G, tỷ số $-\frac{1}{2}$. Từ đó suy ra bốn điểm O, G, I, H thẳng hàng và I là trung điểm đoạn OH.

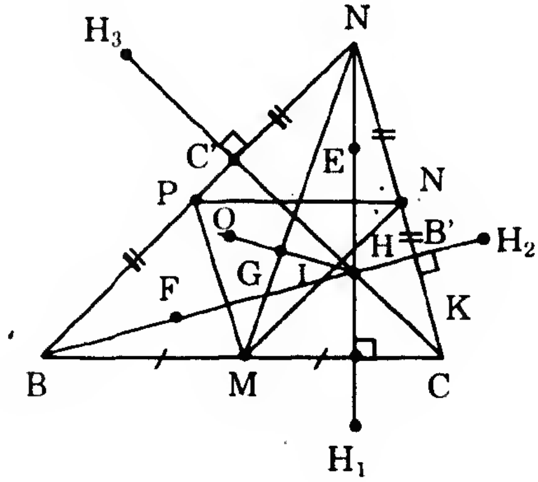
(Đường thẳng đi qua bốn điểm O, G, I, H gọi là đường thẳng Euler)

b) Chứng minh rằng phép vị tự tâm H, tỷ số $\frac{1}{2}$ biến đường tròn (ABC) thành đường tròn (MNP). Từ đó suy ra rằng, trong một tam giác trung điểm ba cạnh, chân ba đường cao và trung điểm các đoạn nối trực tâm với ba đỉnh là chín điểm ở trên một đường tròn.

(Đường tròn đi qua chín điểm ở trên gọi là đường tròn Euler)

(SGK 11, trang 125)

Giải



a) Theo tính chất trọng tâm:

$$\begin{cases} \overrightarrow{GH} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA} \\ \overrightarrow{GN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GB} \\ \overrightarrow{GP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GC} \end{cases}$$

Do đó: M, N, P lần lượt là ảnh của A, B, C trong phép vị tự $V(G; -\frac{1}{2})$.

$\Rightarrow$ Phép vị tự $V(G; -\frac{1}{2})$ biến ΔABC thành ΔMNP.

- Từ kết quả trên, suy ra tâm I của đường tròn (MNP) là ảnh của tâm O của đường tròn (ABC) trong phép vị tự $V(G; -\frac{1}{2})$, do đó:

$$\overrightarrow{GI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GO} \qquad (1)$$

Hơn nữa: $\left.\begin{matrix} DN // BC \\ OM \perp BC \end{matrix}\right\} \Rightarrow OM \perp PN$

Chứng minh tương tự $ON \perp PM$

$\Rightarrow$ O là trực tâm ΔMNP

$\Rightarrow \overrightarrow{GO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$ (Tính chất phép vị tự $V(G; -\frac{1}{2})$) $\qquad$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ O, G, H, I thẳng hàng và $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OH}$.

b) • Dễ thấy rằng: $V(H; \frac{1}{2})$: (ABC) $\longmapsto$ (MNP)

- Gọi E, F, K lần lượt là các trung điểm của các đoạn HA, HB, HC và H_1, H_2, H_3 lần lượt là các điểm xứng của H qua ba cạnh BC, CA, AB. Khi đó $H_1, H_2, H_3 \in$ (ABC) và phép vị tự $V(H; \frac{1}{2})$

+ Biến A, B, C $\in$ (ABC) thành E, F, K $\in$ (MNP)

+ Biến $H_1, H_2, H_3 \in$ (ABC) thành A', B', C' $\in$ (MNP)

(với A', B', C' là các chân đường cao của ΔABC xuất phát từ A, B, C tương ứng)

Vậy chín điểm M, N, P, E, F, K, A', B', C' nằm trên một đường tròn.

Bài 20. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm A(–2, 2) và đường thẳng d đi qua A có hệ số góc bằng 1. Gọi B là điểm di động trên d. Gọi C là điểm sao cho tứ giác OABC là một hình bình hành. Tìm phương trình tập hợp:

a) Tâm I của hình bình hành OABC.

b) Trọng tâm G của ΔABC.

Giải

a) • Phương trình đường thẳng d:

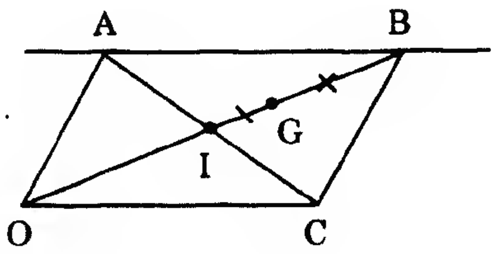
$$y - 2 = x + 2$$

$$\Leftrightarrow x - y + 4 = 0$$

• $B \in (d) \Leftrightarrow x_B - y_B + 4 = 0$ (*)

• I là tâm hình bình hành OABC $\Leftrightarrow \overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

$$\Leftrightarrow V(0; \frac{1}{2}): B \longmapsto I$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{1}{2}x_B \\ y_I = \frac{1}{2}y_B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 2x_I \\ y_B = 2y_I \end{cases}$$

Thay vào (*) ta có: $x_I - y_I + 2 = 0$

Vậy: Tập hợp các tâm I là đường thẳng $x - y + 2 = 0$.

b) G trọng tâm $\Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

$$\Leftrightarrow V(0; \frac{2}{3}): B \longmapsto G$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \frac{2}{3}x_B \\ y_G = \frac{2}{3}y_B \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_B = \frac{3}{2}x_G \\ y_B = \frac{3}{2}y_G \end{cases}$$

Thay vào (*) (ở câu (a)), ta có:

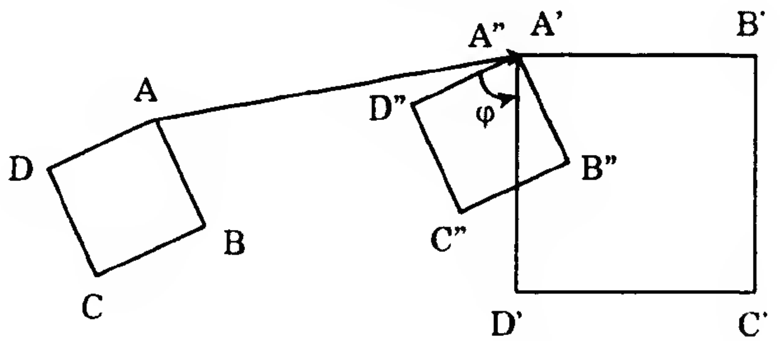
$$\frac{3}{2}x_G - \frac{3}{2}y_G + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_G - y_G + \frac{8}{3} = 0$$

Vậy: Tập hợp các trọng tâm G là đường thẳng $x - y + \frac{8}{3} = 0$.

Bài 21. Chứng minh rằng hai hình vuông bất kỳ đồng dạng với nhau.

Giải



Cho hai hình vuông bất kỳ ABCD và A'B'C'D'

- Trước hết tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AA'}$, hình vuông ABCD biến thành hình vuông A"B"C"D"
- Tiếp theo, thực hiện phép quay tại A', góc quay $\varphi = (\overrightarrow{A'D''}, \overrightarrow{A'D'})$
- Say cùng, thực hiện phép vị tự tâm A' tỷ số $k = \frac{A'B'}{A'B''}$

Khi đó hình vuông A'B'C'D' có được, bằng cách thực hiện liên tiếp ba phép đồng dạng $T_{\overrightarrow{AA'}}$, $Q(A', \varphi)$, $V(A', k)$.

Vậy hai hình vuông bất kỳ đồng dạng với nhau.

Bài 22. Cho lục giác đều ABCDEF có tâm O. Hãy chỉ ra ít nhất hai phép dời hình biến hình bình hành ABOF thành hình bình hành CBOD.

Giải

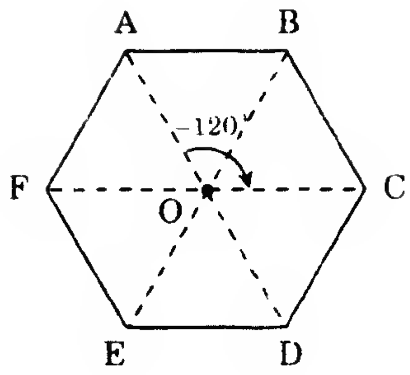
- Xét phép dời hình $Đ_{OB}$, ta có:

$$Đ_{OB}: A \longmapsto C$$

$B \longrightarrow B$

$O \longrightarrow O$

$F \longrightarrow D$



Vậy phép dời hình $Đ_{OB}$ biến hình bình hành ABOF hình bình hành CBOD.

- Xét phép dời hình Q(O; –120). ta có

$Q(O; -120^0)$: $A \longrightarrow C$

$B \longrightarrow D$

$O \longrightarrow O$

$F \longrightarrow B$

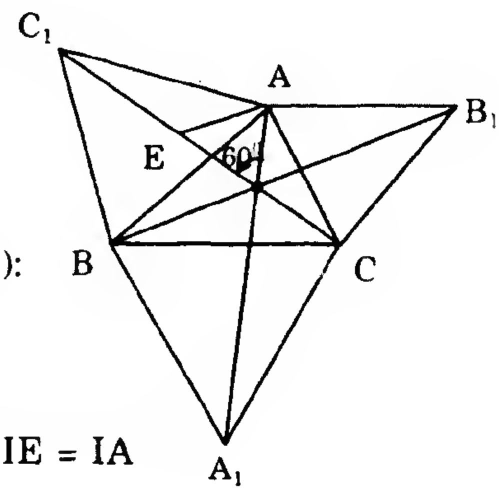
Vậy phép dời hình $Q(0; -120^0)$ biến hình bình hành ABOF thành hình bình hành CDOB.

C/ BÀI TẬP NÂNG CAO

Bài 1. Cho ΔABC về phía ngoài tam giác dựng ba tam giác đều A_1BC, AB_1C, ABC_1. Chứng minh rằng AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy.

Giải

Gọi I là giao điểm của AA_1 và CC_1



Xét phép quay $Q(B; 60^0)$, ta có:

$Q(B; 60^0)$: $A_1 \longrightarrow C$

$A \longrightarrow C_1$

Theo tính chất phép quay: $Q(B; 60^0)$:

$A_1A \longrightarrow CC_1$

$\Rightarrow \widehat{AIC_1} = 60^0$

Lấy trên cạnh CC_1 điểm E sao cho IE = IA

$\Rightarrow \Delta AIE$ đều

Xét phép quay $Q(A; -60^0)$, ta có:

$Q(A; 60^0)$: $B \longrightarrow C_1$

$I \longrightarrow E$

$B_1 \longrightarrow C$

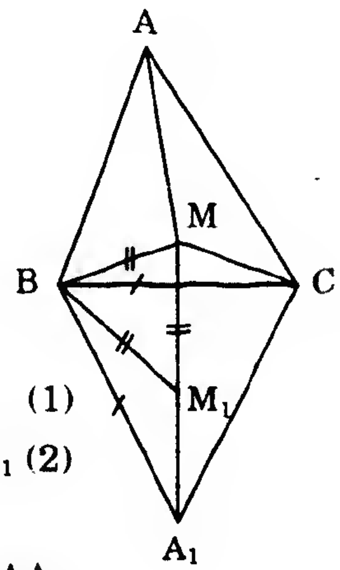
Vì C_1, E, C thẳng hàng nên B, I, B_1 thẳng hàng. Điều này có nghĩa là AA_1, BB_1, CC_1 đồng quy tại I.

Chú ý: Qua chứng minh trên, ta dễ dàng suy ra được:

$$AA_1 = BB_1 = CC_1.$$

Bài 2. Cho ΔABC. Tìm điểm M nằm trong mặt phẳng chứa ΔABC sao cho $f(M) = MA + MB + MC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải



Xét phép quay $Q(B; -60^0)$

Giả sử trong phép quay này, thì:

$$Q(B; -60^0): C \longmapsto A_1$$
$$M \longrightarrow M_1$$

Theo định nghĩa của phép quay thì $BM = BM'$ và $\widehat{MBH_1} = 60^0$

$\Rightarrow \Delta MBM_1$ đều $\Rightarrow BM = MM_1$ (1)

Theo tính chất của phép quay thì $CM = A_1M_1$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow f(M) = MA + MB + MC$

$$= AM + MM_1 + M_1A_1 \geq AA_1$$

$$\Rightarrow \min f(M) = AA_1$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ A, M, M_1, A_1 thẳng hàng.

Lúc này: $Q(B; -60^0): M \longrightarrow M_1$

$$C \longmapsto A_1$$

$\Rightarrow Q(B; -60^0): MC \longrightarrow M_1A_1$

$\Rightarrow (\widehat{\overline{MC}, \overline{M_1A_1}}) = 60^0$

Mà $\widehat{BMM_1} = 60^0$

$\Rightarrow \quad \widehat{BMC} = 120^0$

$\Rightarrow \quad \widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CHA} = 120^0$

$\Rightarrow$ M chính giao điểm của ba cung chứa góc 120^0 dựng trên ba cạnh AB, BC, CA.

Vậy f(M) đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ M chính là giao điểm của ba cung chứa góc 120^0 dựng trên ba cạnh AB, BC, CA. (điểm M lúc này còn gọi là điểm Toriselli).

Bài 3. Cho ΔABC nhọn. Gọi M^* là điểm cực tiểu của hàm điểm $f(M) = MA + MB + MC$.

Chứng minh rằng:

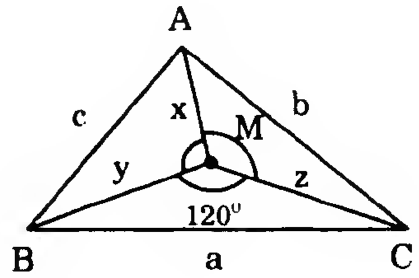
$$a^2M^*A + b^2M^*B + c^2M^*C \le \frac{1}{3}(M^*A + M^*B + M^*C)^3.$$

(Đề thi Olympic 30 - 4, lần IX, năm 2003)

Giải

Theo kết quả bài 2: M^* nhìn ba cạnh ΔABC dưới góc 120^0

Đặt: $\begin{cases} M^*A = x > 0 \\ M^*B = y > 0 \\ M^*C = z > 0 \end{cases}$



$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = y^2 + z^2 + yz \\ b^2 = z^2 + x^2 + zx \\ c^2 = x^2 + y^2 + xy \end{cases}$$

(Do định lý hàm cosin)

Do đó, bất đẳng thức chứng minh tương đương

$$(y^2 + z^2 + yz)x + (z^2 + x^2 + zx)y + (x^2 + y^2 + xy)z \le \frac{1}{3}(x + y + z)^3$$

$$\Leftrightarrow x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2) + 3xyz \le \frac{1}{3}(x + y + z)^3$$

$$\Leftrightarrow xy(x + y) + yz(y + z) + zx(z + x) + 3xyz \le \frac{1}{3}(x + y + z)^3$$

$\Leftrightarrow 3(xy + yz + zx) \le (x + y + z)^2$

$\Leftrightarrow xy + yz + zx \le x^2 + y^2 + z^2$

$\Leftrightarrow (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \ge 0$ (luôn đúng)

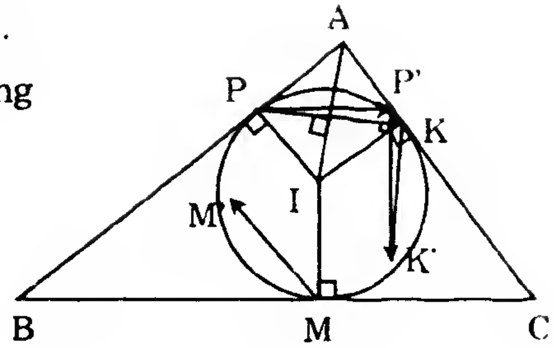
$\Rightarrow$ (đpcm).

Bài 4. Cho I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC. Chứng minh rằng:

$$a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} = \vec{0}.$$

(Đề thi Olympic toán quốc tế, năm 1982)

Giải



Gọi M, P, K lần lượt là tiếp điểm của (I) với các cạnh BC, CA, AB.

Xét phép quay $Q(I; -90^0)$, trong phép quay này, giả sử:

$$Q(I; -90^0): M \longrightarrow M'$$
$$P \longrightarrow P'$$
$$K \longrightarrow K'$$

Khi đó: $\begin{cases} PK = IA.\sin A \\ PK = P'K' \\ P'K' \,/\!/\, IA \text{ (Vì } P'K' \perp PK \text{ và } IA \perp PK) \end{cases}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IA}.\sin A = \overrightarrow{KP'}$$

Chứng minh tương tự:

$$\overrightarrow{IB}.\sin B = \overrightarrow{P'M'}$$
$$\overrightarrow{IC}.\sin C = \overrightarrow{M'K'}$$

Vậy: $\overrightarrow{IA}.\sin A + \overrightarrow{IB}.\sin B + \overrightarrow{IC}.\sin C$

$= \overrightarrow{KP'} + \overrightarrow{P'M'} + \overrightarrow{M'K'} = \vec{0}$

hay $a.\overrightarrow{IA} + b.\overrightarrow{IB} + c.\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Bài 5. Cho ΔABC nhọn. Dựng hình vuông nội tiếp trong tam giác có hai đỉnh trên cạnh BC, một đỉnh trên cạnh AB và một đỉnh trên cạnh AC.

Giải

- *Phân tích*

Giả sử dựng được hình vuông MNPQ thỏa điều kiện bài toán.

Đặt $k = \dfrac{MN}{BC} \in (0, 1)$. Thực hiện phép vị tự tâm A tỷ số k thì M biến thành B, N biến thành C và hình vuông MNPQ biến thành hình vuông BCDE. Suy ra A, P, D thẳng hàng và A, Q, E thẳng hàng

- *Cách dựng*

+ Dựng hình vuông BCDE ở ngoài ΔABC

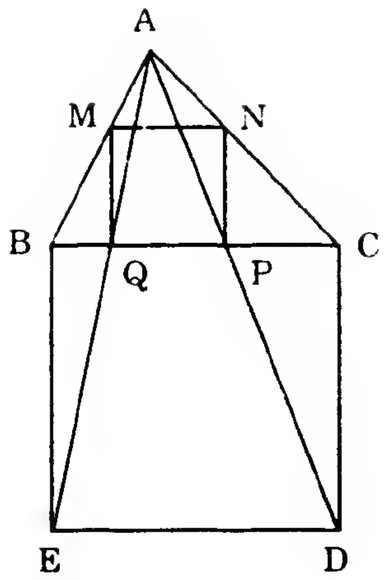
+ AD cắt BC tại P

+ AE cắt BC tại Q

+ Dựng PN // CD ($N \in AC$)

+ Dựng NM // BC ($M \in AB$)

Thì MNPQ là hình vuông cần dựng



• *Chứng minh:*

+ Theo cách dựng, ta có tứ giác MNPQ nội tiếp trong ΔABC

+ Áp dụng định lý Talet, ta có:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{AP}{AD} = \frac{AQ}{AE} = k$$

Do đó: $V(A, k)$: MNPQ $\longrightarrow$ BCDE

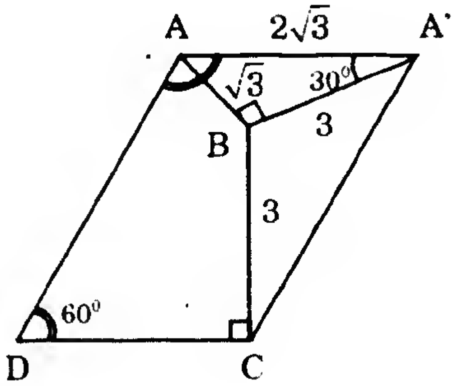
Mà BCDE là hình vuông nên MNPQ là hình vuông

• Biện luận

Vì ΔABC nhọn nên AD luôn cắt đoạn BC tại điểm duy nhất. Do đó, bài toán luôn có một nghiệm hình.

Bài 6. Cho tứ giác ABCD có $AB = \sqrt{3}$, $BC = 3$, $CD = 2\sqrt{3}$, $\widehat{BAD} = \widehat{CDA} = 60^0$. Tìm số đo của các góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{BCD}$.

Giải



• Xét tịnh tiến $T_{\overrightarrow{DC}}$, ta có:

$$T_{\overrightarrow{DC}}: A \longrightarrow A'$$

Khi đó ADCA' là hình bình hành và $\widehat{BAA'} = 60^0$

(vì $\widehat{DAA'} = 120^0$ và $\widehat{DAB} = 60^0$)

• Trong $\Delta ABA'$, ta có:

$$A'B^2 = AB^2 + AA'^2 - 2AB.AA'.\cos 60^0$$

$$= 3 + 12 - 2\sqrt{3}.2\sqrt{3}.\frac{1}{2}$$

$$= 9$$

$\Rightarrow A'B = 3$

$\Rightarrow AA'^2 = 12 = 9 + 3 = A'B^2 + AB^2$

$\Rightarrow \Delta ABA'$ vuông tại B

- $A'B = BC = 3 \Rightarrow \Delta A'BC$ cân tại B

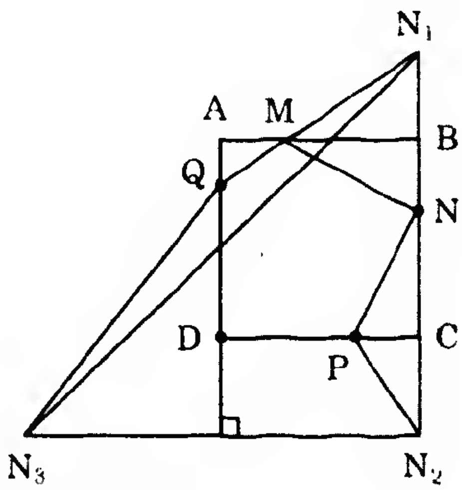
$\Rightarrow \widehat{BCA'} = \widehat{BA'C} = 30^0$

$\Rightarrow \widehat{BCD} = 120^0 - 30^0 = 90^0$

Và $\widehat{ABC} = 360^0 - (90^0 + 120^0) = 150^0$.

Bài 7. Cho hình vuông ABCD, cạnh a và MNPQ là tứ giác lồi có bốn đỉnh M, N, P, Q lần lượt thuộc bốn cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh rằng chu vi của tứ giác không nhỏ hơn $2a\sqrt{2}$.

Giải



Gọi N_1 và N_2 lần lượt là các đỉnh đối xứng của N qua B và C.

Tiếp theo, gọi N_3 là điểm đối xứng của N_2 qua AD.

Khi đó:

$MN + NP + PQ + QM$

$= (MN + QM) + (NP + PQ)$

$= (MN_1 + QM) + (N_2P + PQ)$

$\geq QN_1 + N_2Q \geq QN_1 + QN_3 \geq N_1N_3 = 2a\sqrt{2}$

Vậy: $MN + NP + PQ + QM \geq 2a\sqrt{2}$.

Bài 8. Trên đoạn AD cố định dựng hình bình hành ABCD sao cho $\frac{AC}{AD} = \frac{BD}{AB}$. Tìm quỹ tích đỉnh C của hình bình hành.

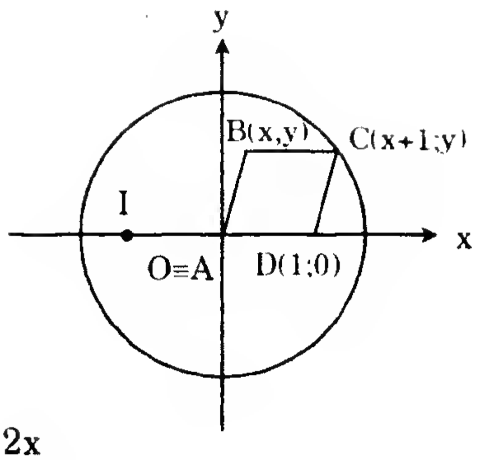
Giải

Lấy A làm gốc tọa độ và dựng hệ trục tọa độ Oxy sao cho trục hoành là đường thẳng nối A, D và có chiều dương từ A đến D (xem hình vẽ).

Trong hệ trục tọa độ này, không giảm tính tổng quát ta có thể xem điểm D có tọa độ là (1, 0).

Gọi B(x, y) thì C(x + 1, y)

Khi đó: $\frac{AC}{AD} = \frac{BD}{AB}$



$\Leftrightarrow AC^2.AB^2 = AD^2.BD^2$

$\Leftrightarrow [(x + 1)^2 + y^2] (x^2 + y^2)$

$= (x - 1)^2 + y^2$

$\Leftrightarrow (x^2 + y^2) (x^2 + y^2 + 2x + 1)$

$= x^2 + y^2 - 2x + 1$

$\Leftrightarrow (x^2 + y^2) (x^2 + y^2 + 2x) = 1 - 2x$

$\Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 1)(x^2 + y^2 + 2x - 1) = 0$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x + 1)^2 + y^2 = 2$

Từ đây. suy ra quỹ tích của B là đường tròn tâm I(−1, 0), bán kính $\sqrt{2}$ (I chính là điểm đối xứng của D qua A)

Rõ ràng: $T_{\overrightarrow{AD}} : B \to C$

Vậy quỹ tích của C là tịnh tiến của quỹ tích B theo $\overrightarrow{AD}$, tức là quỹ tích của C là đường tròn tâm A, bán kính $\sqrt{2}$.

Bài 9. Cho tứ giác lồi ABCD. Chứng minh:

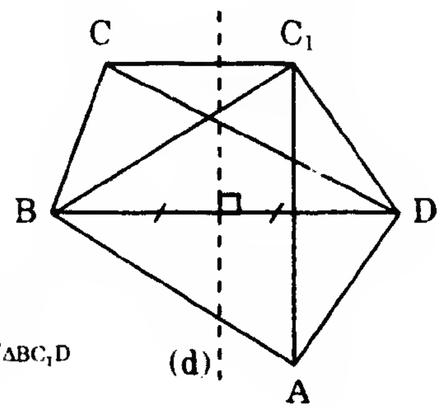
$$2.S_{ABCD} \le AB.CD + BC.AD,$$

trong đó S_{ABCD} là diện tích của tứ giác ABCD.

(Tạp chí "Toán học và Tuổi trẻ")

Giải

Gọi (d) là đường trung trực của đoạn BD và C_1 là ảnh của C trong phép đối xứng qua (d).



Khi đó:

$$\begin{cases} DC_1 = BC,\ BC_1 = DC \\ \Delta BC_1D = \Delta DCB \end{cases}$$

Suy ra:

$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta DCB} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BC_1D}$$

$$= S_{ABC_1D} = S_{\Delta ABC_1} + S_{\Delta ADC_1}$$

$$= \frac{1}{2}AB.BC_1.\sin\widehat{ABC_1} + \frac{1}{2}AD.CD_1.\sin\widehat{ADC_1}$$

$$\leq \frac{1}{2}AB.BC_1 + \frac{1}{2}AD.DC_1$$

Vậy: $S_{ABCD} \leq \frac{1}{2}(AB.DC + AD.BC)$.

Bài 10. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho phép biến hình T biến điểm bất kỳ M(x, y) thành điểm M'(x', y') sao cho:

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{2} + y\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y' = \frac{x\sqrt{2}}{2} - \frac{y}{2} \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng tập hợp những điểm bất động của T. (Tức là những điểm M mà T(M) = M) là một đường thẳng d.

b) Chứng minh rằng T là phép đối xứng qua d.

Giải

a) Điểm M(x, y) là điểm bất động của T khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x = \frac{x}{2} + y\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y\sqrt{3} = 0 \\ x\sqrt{3} - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

Vậy tập hợp các điểm bất động của T là đường thẳng d có phương trình là $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.

b) Để chứng minh T là phép đối xứng qua d, ta sẽ chứng minh M đối xứng với M' qua d. (là xong).

Đường thẳng MM' có vec tơ chỉ phương:

$$\overrightarrow{MM'} = (x' - x, y' - y)$$

$$= \left(\frac{x}{2} + y\frac{\sqrt{3}}{2} - x, \frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{y}{2} - y\right)$$

$$= \left(y\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{x}{2}, \frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{3y}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}(y\sqrt{3} - x), \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \sqrt{3}y)\right)$$

$$= \frac{1}{2}(x - \sqrt{3}\,y)\,(-1, \sqrt{3}\,)$$

Mặt khác, vectơ chỉ phương của d là·

$$\vec{a}_d = (3, \sqrt{3}\,)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MM'}.\vec{a}_d = -3 + 3 = 0$$

$$\Rightarrow d \perp MM' \ (1)$$

Hơn nữa, tọa độ trung điểm I của đoạn MM' là

$$\begin{cases} x_I = \frac{1}{2}(x_M + x_{M'}) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{x}{2} + y\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}x + y) \\ y_I = \frac{1}{2}(y_M + y_{M'}) = \frac{1}{2}\left(y + \frac{x\sqrt{3}}{2} - \frac{y}{2}\right) = \frac{1}{4}(\sqrt{3}x + y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow y_I - \frac{\sqrt{3}}{3}x_I = \frac{1}{4}(\sqrt{3}\,x + y) - \frac{1}{4}(\sqrt{3} \ + y) = 0$$

$$\Rightarrow I \in (d)\ (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ (d) là trung trực của đoạn MM'.

$\Rightarrow$ (đpcm).

D/ BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ÔN TẬP CHƯƠNG I

Bài 1. Cho góc nhọn xOy và A thuộc miền trong của góc này. Điểm B thuộc tia Ox (B ≠ 0). Tìm C thuộc tia Oy sao cho chu vi ΔABC nhỏ nhất.

☐ a. C là hình chiếu của A trên Oy

☐ b. C là hình chiếu của B trên Oy

☐ c. C là hình chiếu trung điểm I của đoạn AB trên Oy

☐ d. Một đáp số khác.

Bài 2. Cho ΔABC, đường cao AH, trung tuyến AM. Gọi E là điểm đối xứng của A qua BC. Kéo dài AM về phía M một đoạn AM = MD. Chọn đáp án sai.

☐ a. BCDE là hình thang cân

☐ b. BE = CD

☐ c. ABEM là hình vuông

☐ d. AB = CD.

Bài 3. Cho đường tròn $(\mathscr{C})$: $x^2 + y^2 = 1$. Tìm phương trình của đường tròn $(\mathscr{C}')$: đối xứng với $(\mathscr{C})$ qua điểm A(1,1).

☐ a. $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2008$

☐ b. $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$

☐ c. $(x - 2)^2 + y^2 = 1$

☐ d. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1$.

Bài 4. Cho hình vuông ABCD. Dựng bên trong hình vuông một tam giác cân CDE với $\widehat{ECD} = \widehat{EDC} = 25^0$, dựng ra phía ngoài hình vuông một tam giác đều CDF. Chọn đáp án sai.

☐ a. ΔCEF cân tại F ☐ b. $T_{DA}(F) = F$

☐ c. ΔABE đều ☐ d. $\widehat{AED} = 77^0$.

Bài 5. Cho ΔABC đều. Gọi P, Q lần lượt là hai điểm trên cạnh AB, AC sao cho AP = CQ. Xác định phép quay biến CQ thành AP.

☐ a. Q (B, 45^0)

☐ b. Q (G, 120^0) (với G là trọng tâm ΔABC)

☐ c. Q (M, 180^0) (với M là trung điểm cạnh AC)

☐ d. Q (N, 90^0) (với M là trung điểm của BC và N nằm trên cạnh AM sao cho BC = 2MN).

Bài 6. Cho ΔABC vuông cân tại B và I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác. Xét phép quay tâm B, góc φ biến C thành A, I thành J, BI cắt AC tại M, qua phép quay trên, M biến thành N. Chọn đáp án sai.

☐ a. ΔAIJ đều ☐ b. ΔBMN vuông cân

☐ c. $\widehat{IAJ} = 45^0$ ☐ d. MBNA là hình vuông.

Bài 7. Cho đường tròn (O) có AB và CD la hai đường kính. Gọi E là trung điểm AO, CE cắt AD tại F. Tìm tỷ số k của phép vị tự E, biến c thành F.

☐ a. $k = -\dfrac{1}{6}$ ☐ b. $k = -\dfrac{1}{5}$

☐ c. $k = -\dfrac{1}{4}$ ☐ d. $k = -\dfrac{1}{3}$

Bài 8. Cho đường tròn ($\mathscr{C}$): $(x - 1)^2 + y^2 = 1$. Viết phương trình của ($\mathscr{C}'$) là ảnh của ($\mathscr{C}$) qua phép vị tự tâm O, tỷ số k = 2.

☐ a. $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ ☐ b. $(x + 2)^2 + y^2 = 4$

☐ c. $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$ ☐ d. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$.

Bài 9. Cho hình vuông ABCD, P thuộc cạnh AB, H là chân đường tròn vuông góc hạ từ B tới PC. Phép đồng dạng biến tam giác BHC thành tam giác PHB. Tìm ảnh của B và D.

☐ a. H và Q (Q ∈ cạnh BC và BQ = BP)

☐ b. C và Q (Q ∈ cạnh BC và BQ = BP)

☐ c. P và Q

☐ d. P và C.

Bài 10. Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi M, N là các điểm thuộc cạnh AB, AC sao cho $BM = \frac{1}{3}AB$, $AN = \frac{1}{3}AC$. Chọn đáp án sai:

☐ a. ΔAHB ∽ ΔCAB ☐ b. ΔAHB ∽ ΔCAB

☐ c. ΔHBM ∽ ΔHAN ☐ d. ΔAMN ∽ ΔABC.

Bài 11. Tìm phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ biến parabol $y = x^2$ (P) thành parabol $y = x^2 + 4x$ (P').

☐ a. $\vec{v} = (-2, 4)$ ☐ b. $\vec{v} = (-2, -4)$

☐ c. $\vec{v} = (2, 8)$ ☐ d. $\vec{v} = (2, -8)$.

Bài 12. Cho A(3, 1), B(−2, 3). Tìm M trên đường thẳng x = 1 và có hình chiếu của nó trên trục tung là N sao cho AMNB ngắn nhất

☐ a. M(−1, −2) ☐ b. M(1, 2)

☐ c. M(1, −2) ☐ d. M(−1, 2).

ĐÁP ÁN

Bài	1	2	3	4	5	6
Đáp án	d	c	b	d	b	a
Bài	7	8	9	10	11	12
Đáp án	d	a	c	d	b	b

Chương II.

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ SONG SONG

A/ TÓM TẮT GIÁO KHOA

§1. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

1. Mở đầu về hình học không gian

- *Mặt phẳng:*

Trang giấy, mặt bảng đen, mặt tường lớp học, mặt hồ lặng gió, mặt bàn, tấm gương phẳng... cho ta hình ảnh một phần mặt phẳng trong không gian.

- *Điểm thuộc mặt phẳng*

+ Nếu điểm A thuộc mặt phẳng (P), ký hiệu $A \in$ mp (P) hoặc $A \in (P)$

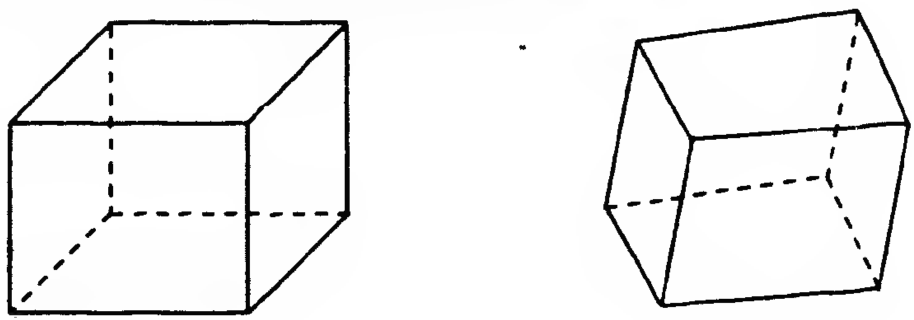
+ Nếu điểm A không thuộc mặt phẳng (P), ký hiệu $A \notin$ mp (P) hoặc $A \notin (P)$

- *Hình biểu diễn của một hình trong không gian*

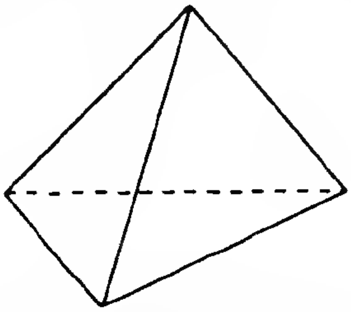
+ Hình lập phương là hình nằm trong không gian, nó có sáu mặt là sáu hình vuông.

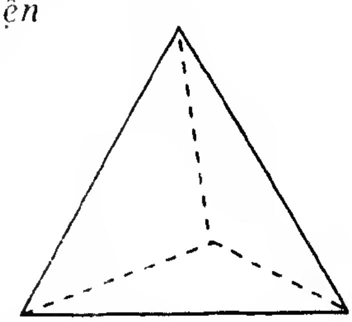
+ Hình tứ diện cũng là hình nằm trong không gian, nó có bốn mặt là bốn tam giác. Để dễ hình dung, người ta vẽ chúng thành những hình phẳng, gọi là hình biểu diễn của các hình không gian đó.

Hai hình biểu diễn của hình lập phương



Hai hình biểu diễn của hình tứ diện





Để vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian người ta dựa vào những quy tắc sau đây.

+ Hình biểu diễn của đường thẳng là đường thẳng, của đoạn thẳng là đoạn thẳng.
+ Hình biểu diễn của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song, của hai đường thẳng cắt nhau là hai đường thẳng cắt nhau.
+ Hình biểu diễn phải giữ quan hệ thuộc giữa điểm và đường thẳng.
+ Dùng nét vẽ liền (–) để biểu diễn cho những hình trông thấy và dùng nét đứt đoạn (...) để biểu diễn cho những đường bị khuất.

2. *Các tính chất thừa nhận của hình học không gian*

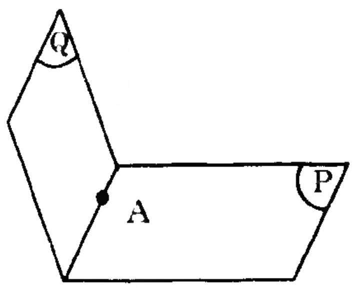
Tính chất 1. Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.

Tính chất 2. Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

Tính chất 3. Tồn tại bốn điểm không nằm trên một mặt phẳng.

Tính chất 4. Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất chứa tất cả điểm chung của hai mặt phẳng đó.

Đường thẳng chung của hai mặt phẳng phân biệt gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng đó.



Tính chất 5. Trên mỗi mặt phẳng, các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

Định lý: Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt của một mặt phẳng thì đường thẳng nằm trên mặt phẳng đó.

3. *Điều kiện xác định một mặt phẳng*

Một mặt phẳng được xác định một trong ba cách sau đây.

- Một mặt phẳng xác định nếu biết nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.
- Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua một đường thẳng và một điểm không thuộc đường thẳng đó.
- Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua hai đường thẳng cắt nhau.

Ký hiệu:

- Mặt phẳng đi qua A, B, C phân biệt không thẳng hàng, ký hiệu là mp (ABC).
- Mặt phẳng đi qua A và đường thẳng d ($A \notin d$), ký hiệu là mp (A, d) hoặc mp (d, A)
- Mặt phẳng đi qua hai đường thẳng cắt nhau d và d', ký hiệu là mp (d, d').

4. *Hình chóp và tứ diện*

Định nghĩa 1: Cho đa giác $A_1, A_2, ..., A_n$ ($n \geq 3$) và một điểm S nằm ngoài mặt phẳng (P) chứa đa giác nối S với các đỉnh $A_1A_2...A_n$ tạo ra tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$. Hình giữa n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ và đa giác $A_1A_2...A_n$ gọi là hình chóp, ký hiệu là $S.A_1A_2...A_n$.

+ Điểm S gọi là đỉnh của hình chóp
+ Hình đa giác $A_1A_2...A_n$ gọi là mặt đáy của hình chóp
+ Các cạnh của mặt đáy gọi là cạnh đáy của hình chóp
+ Các đoạn thẳng $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ gọi là các cạnh bên của hình chóp.

+ Các tam giác SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1 gọi là các mặt bên của hình chóp

+ Nếu đáy của hình chóp là tam giác, tứ giác, ngũ giác... thì hình chóp tương ứng gọi là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác...

Định nghĩa • Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ACD, ABD và BCD gọi là hình tứ diện.

+ Các điểm A, B, C, D gọi là các đỉnh của hình tứ diện

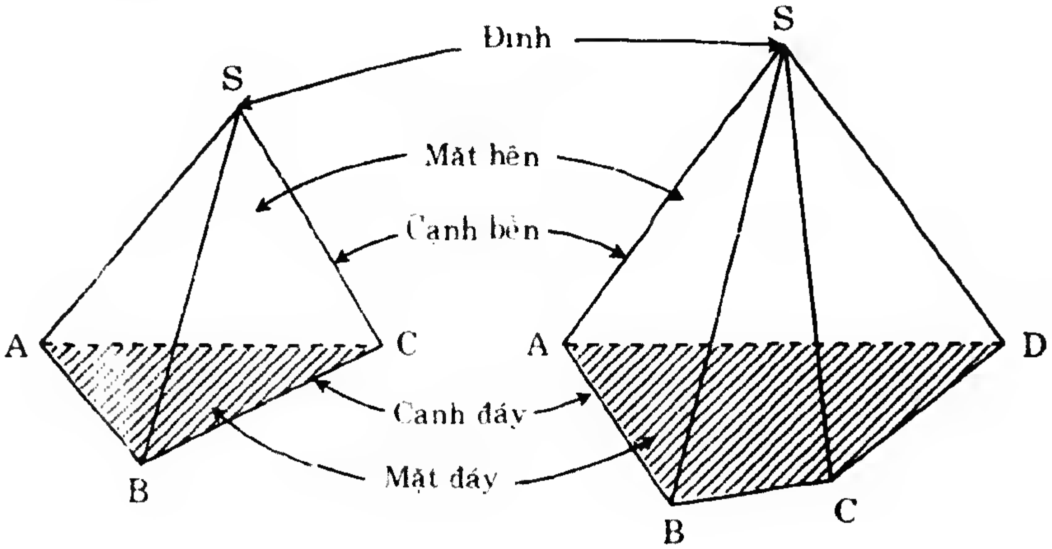
+ Các đoạn thẳng AB, AC, AD, BC, CD, DB gọi là các cạnh của tứ diện

+ Hai cạnh không cùng đi qua một đỉnh gọi là hai cạnh đối diện

+ Các tam giác ABC, ACD, ABD và BCD gọi là các mặt của hình tứ diện

+ Đỉnh không nằm trên một mặt gọi là đỉnh đối diện của mặt đó.

+ Hình tứ diện có thể xem là hình chóp tam giác. Khi đó mỗi đỉnh của hình tứ diện có thể xem là một đỉnh mà hình chóp tương ứng.



§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU VÀ HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

1. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng phân biệt

Định nghĩa:

- Hai đường thẳng gọi là chéo nhau nếu chúng không cùng nằm trong một mặt phẳng.
- Hai đường thẳng gọi là song song nhau nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung.

2. Các tính chất của hai đường thẳng song song

Định lý 1: Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

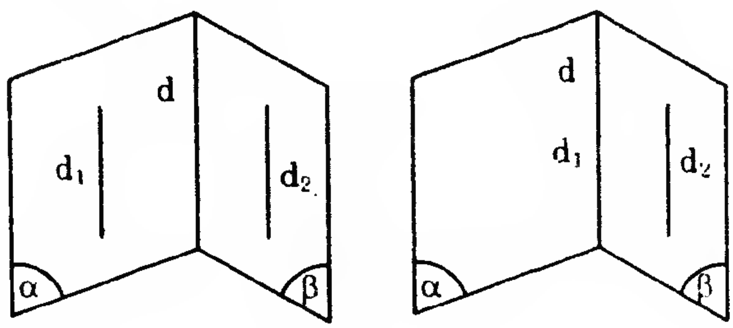
Định lý 2: Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Định lý 3: (Về giao tuyến của ba mặt phẳng)

Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.

Hệ quả:

Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.



§3. ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG VỚI MẶT PHẲNG

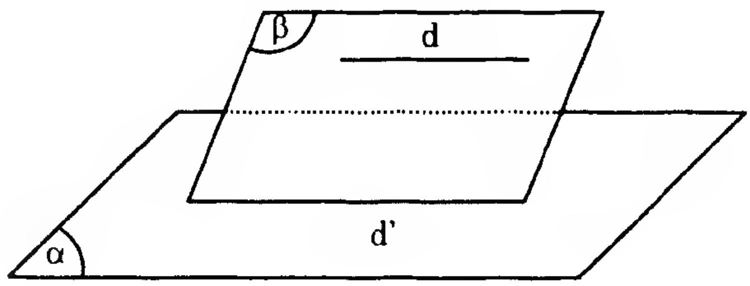
1. *Định nghĩa:* Đường thẳng d và mặt phẳng (α) gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

   Ký hiệu: d // (α) hoặc (α) // d.

2. *Các tính chất của đường thẳng song song với mặt phẳng*

   Định lý 1: Nếu đường thẳng d không nằm mặt phẳng (α) và d song song với đường thẳng d' nằm trong (α) thì d song song với (α).

   Định lý 2: Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) chứa d và cắt (α) theo giao tuyến d' thì d' song song với d.



   Hệ quả: Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

   Định lý 3: Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

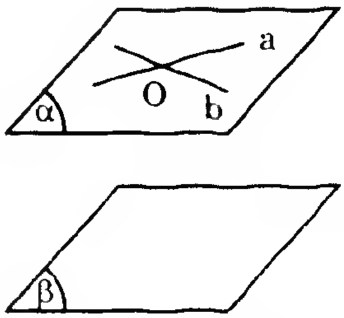
§4. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

1. *Định nghĩa:* Hai mặt phẳng (α) và (β) gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

Ký hiệu: (α) // (β) hoặc (β) // (α).

2. ***Các tính chất của hai mặt phẳng song song***

Định lý 1: Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β).



Định lý 2: Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

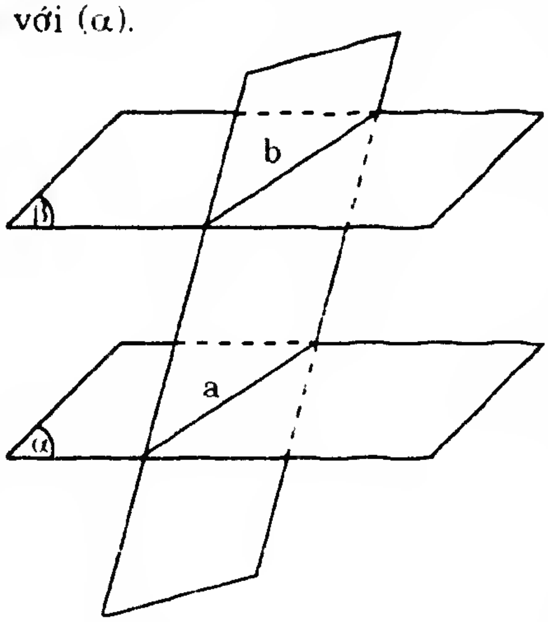
Hệ quả 1: Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì trong (α) có duy nhất một đường thẳng song song với d và qua d có duy nhất một mặt phẳng (β) song song với (α).

Hệ quả 2: Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.

Hệ quả 3: Cho điểm A nằm ngoài mặt phẳng (α). Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (α) đều nằm trong mặt phẳng đi qua A và song song với (α).

Định lý 3. Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến của chúng song song với nhau.

Hệ quả 4: Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau

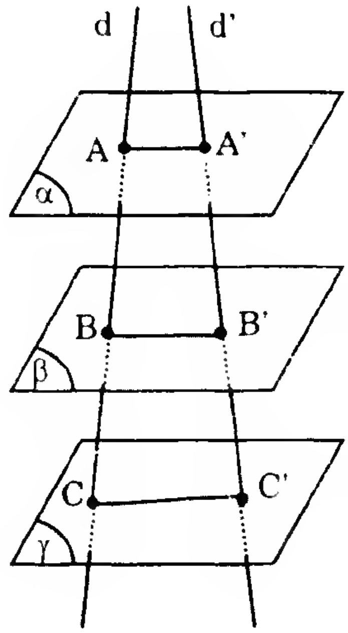


3. *Định lý Ta-lét (Thales)*

Định lý 4. (Định lý Ta-lét thuận)

Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kỳ các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$



Định lý 5: (Định lý Ta-lét đảo)

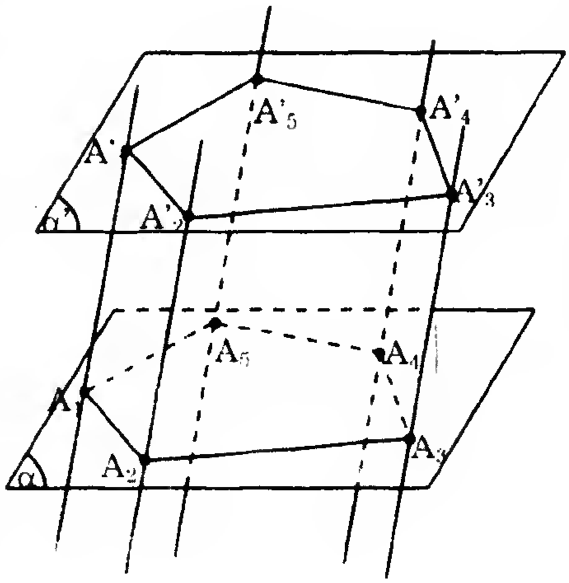
Giả sử trên hai đường thẳng chéo nhau d và d' lần lượt lấy các điểm A, B, C và A', B', C' sao cho B nằm giữa A và C, B' nằm giữa A' và C' và $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.

Khi đó, ba đường thẳng AA', BB', CC' lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song, tức là chúng cùng song song với một mặt phẳng.

4. *Hình lăng trụ và hình hộp*

- *Định nghĩa hình lăng trụ*:

Cho hai mặt phẳng song song (α) và (α'). Trên (α) cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$, qua các đỉnh A_1, A_2, ... A_n ta vẽ các đường thẳng song song với nhau và cắt (α') lần lượt tại A'_1, A'_2, ..., A'_n. Hình gồm hai đa giác $A_1A_2...A_n$, $A'_1A'_2...A'_n$ và các hình bình hành $A_1A'_1A'_2A_2$, $A_2A'_2A'_3A_3$, ..., $A_nA'_nA'_1A_1$ được gọi là hình lăng trụ và ký hiệu là: $A_1A_2...A_nA'_1A'_2...A'_n$.



+ Hai đa giác $A_1A_2...A_n$, $A'_1A'_2...A'_n$ được gọi là hai mặt đáy của hình lăng trụ.

+ Các đoạn thẳng $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, ..., $A_nA'_n$ được gọi là các cạnh bên của hình lăng trụ.

+ Các hình bình hành $A_1A'_1A'_2A_2$, $A_2A'_2A'_3A_3$, ..., $A_nA'_nA'_1A_1$ được gọi là các mặt bên của hình lăng trụ.

+ Các đỉnh của hai đa giác được gọi là các đỉnh của hình lăng trụ.

+ Nếu đáy của hình lăng trụ là tam giác, tứ giác, ngũ giác,... thì lăng trụ tương ứng được gọi là lăng trụ tam giác, lăng trụ tứ giác, lăng trụ ngũ giác...

• Các tính chất của hình lăng trụ:

+ Các cạnh bên của hình lăng trụ bằng nhau và song song với nhau.

+ Các mặt bên của hình lăng trụ là hình bình hành.

+ Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.

• Định nghĩa hình hộp:

+ Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp.

+ Hình lăng trụ có đáy và các mặt bên là các hình chữ nhật được gọi là hình hộp chữ nhật.

+ Hình lăng trụ có đáy và các mặt bên là các hình vuông được gọi là hình lập phương.

B/ BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Cho S là một điểm không thuộc mặt phẳng chứa hình bình hành ABCD. Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD).

Giải

Gọi O là tâm hình bình hành ABCD.

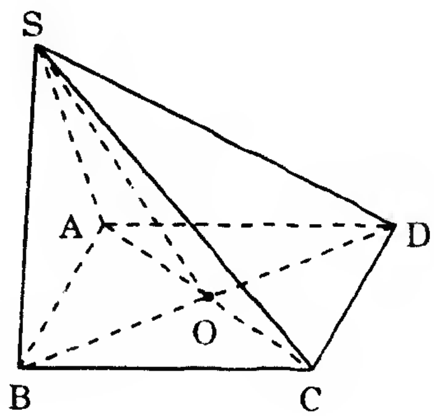
Ta có: $\begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$ (1)

Mặt khác: $S \in (SAC) \cap (SBD)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$SO = (SAC) \cap (SBD)$.

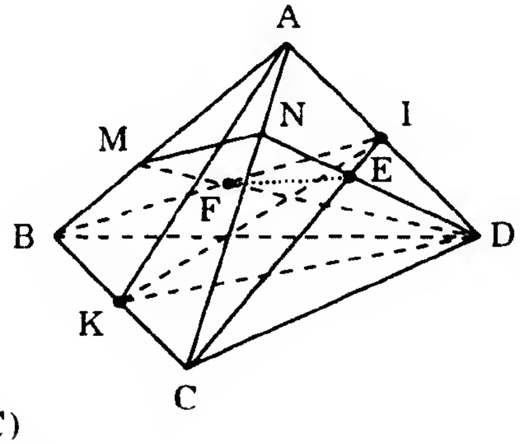


Bài 2. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AD và BC.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (KAD).

b) Gọi M và N là hai điểm lần lượt lấy trên các đoạn thẳng AB và AC. Tìm giao tuyến của (IBC) và (DMN).

Giải



a) Ta có:

- $I \in AD \subset (KAD)$
  $\Rightarrow I \in (KAD)$
  $\Rightarrow I \in (KAD) \cap (IBC)$ (1)
- $K \in BC \subset (DBC)$
  $\Rightarrow K \in (IBC)$
  $\Rightarrow K \in (KAD) \cap (IBC)$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow IK = (KAD) \cap (IBC)$

b) • Trong (ACD): Gọi E là giao điểm của CI và DN.

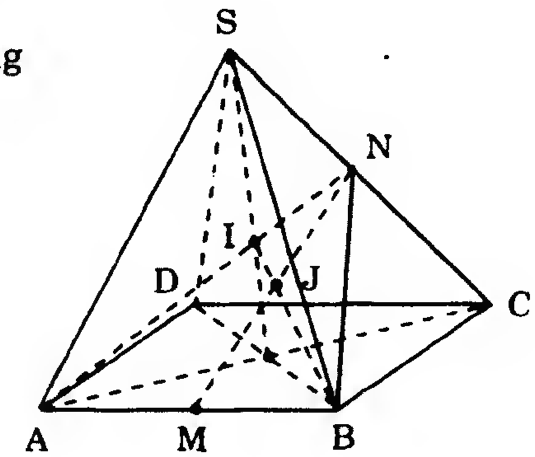
• Trong (ABD): Gọi F là giao điểm của BI và DM.

Khi đó E, F là hai điểm chung phân biệt của (IBC) và (DMN).

Vậy EF là giao tuyến của (IBC) và (DMN).

Bài 3. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M và N theo thứ tự là trung điểm của AB và SC. Tìm giao điểm I và J của mp(SBD) theo thứ tự với các đường thẳng AN và MN.

Giải



- Gọi I là giao điểm của hai trung tuyến SO và AN của ΔSAC.

  Rõ ràng $I \in SO \subset (SBD)$.

  Nên I chính là giao điểm của AN với (SBD)
- Trong (ABN), MN và BI là hai đường thẳng không song song nên cắt nhau tại J.

  Hơn nữa: $J \in BI \subset (SBD)$

  Nên J chính là giao điểm của MN với (SBD).

Bài 4. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình thang, đáy lớn là AB. Gọi I, J lần lượt là trung điểm SA, SB. M là một điểm tùy ý thuộc đoạn SD.

a) Tìm giao tuyến của (SAD) và (SBC).

b) Tìm giao điểm của IM và (SBC).

c) Tìm giao điểm của SC và (IJH).

Giải

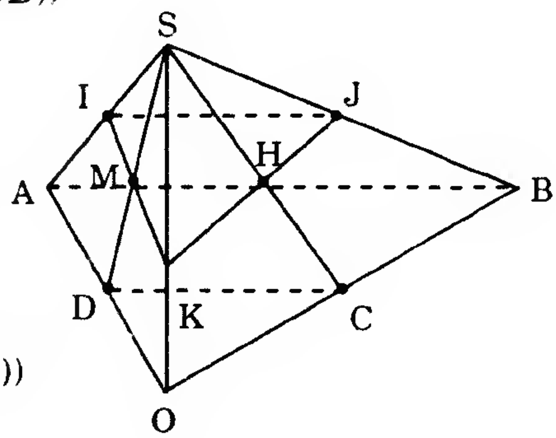
a) Gọi $\{O\} = AD \cap BC$ (Trong (ABCD))

Khi đó: $\begin{cases} O \in AD \subset (SAD) \\ O \in BC \subset (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow O \in (SAD) \cap (SBC)$.

Mặt khác: $S \in (SAD) \cap (SBC)$.

Vậy: $SO = (SAD) \cap (SBC)$.



b) Gọi $\{K\} = IM \cap SO$ (Trong (SAD))

Khi đó: $\begin{cases} K \in IM \\ K \in SO \subseteq (SBC) \end{cases}$

$\Rightarrow \{K\} = IM \cap (SBC)$.

c) Gọi $\{H\} = SC \cap JK$ (Trong (SBC))

Khi đó: $\begin{cases} H \in SC \\ H \in JK \subset (IJK) \equiv (IJM) \end{cases}$

$\Rightarrow \{H\} = SC \cap (IJM)$.

Bài 5. Cho hình chóp S.ABCD. Gọi E là giao điểm của AB và CD. Trên các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt lấy các điểm Q, M, N, P sao cho AM cắt DN tại I và BQ cắt CP tại J. Chứng minh rằng: S, E, I, J thẳng hàng.

Giải

Rõ ràng: $(SAB) \cap (SCD) = SE$

Ta có: $\begin{cases} I \in AM \subset (SAB) \\ I \in DN \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow I \in (SAB) \cap (SCD)$

$\Rightarrow I \in SE$ (1)

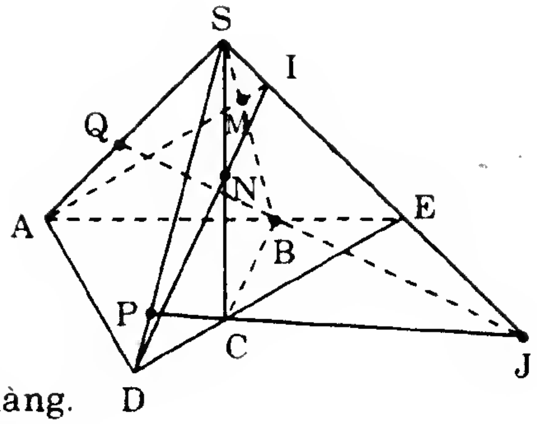
Mặt khác:

$\begin{cases} J \in BQ \subset (SAB) \\ J \in CD \subset (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow J \in (SAB) \cap (SCD)$

$\Rightarrow J \in SE$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ S, E, I, J thẳng hàng.



Bài 6. Cho tứ diện ABCD. Gọi E, F, G lần lượt là ba điểm trên ba cạnh AB, AC, BD sao cho EF cắt BC tại I, EG cắt AD tại H. Chứng minh rằng CD, IG, HF đồng quy.

Giải

Trong (BCD), gọi $\{K\} = CD \cap IG$

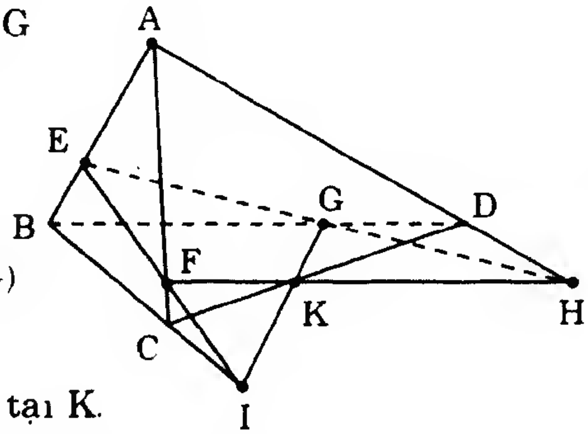
Rõ ràng $(ACD) \cap (EIG) = HF$

Hơn nữa $\begin{cases} K \in CD \subset (ACD) \\ K \in IG \subset (EIG) \end{cases}$

$\Rightarrow KE = (ACD) \cap (EIG)$

$\Rightarrow KE \in HF.$

Do đó CD, IG và HF đồng quy tại K.



Bài 7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Trong mặt phẳng (ABCD) vẽ đường thẳng d đi qua A và không song song với các cạnh của hình bình hành, d cắt BC tại E. Gọi C' là một điểm nằm trên cạnh SC.

a) Tìm giao điểm F của CD và (C'AE).

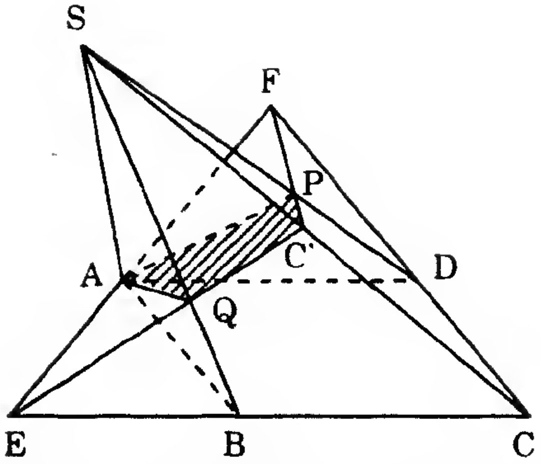
b) Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi (C'AE).

Giải

a) Trong (ABCD), gọi F là giao điểm của CD và AE.

Khi đó: $\begin{cases} F \in CD \\ F \in AE \subset (C'AE) \end{cases}$

$\Rightarrow$ F chính là giao điểm của CD với (C'AE).



b) • Trong (SCD), gọi P là giao điểm của SD và C'F.

• Trong (SBC), gọi Q là giao điểm của SB và C'E.

Khi đó, thiết diện cần tìm là tứ giác APC'Q.

Bài 8. Cho tứ diện ABCD. Trên cạnh AB lấy điểm M. Cho (α) là mặt phẳng qua M song song với AC và BD.

a) Tìm giao tuyến của (α) với các mặt của tứ diện.

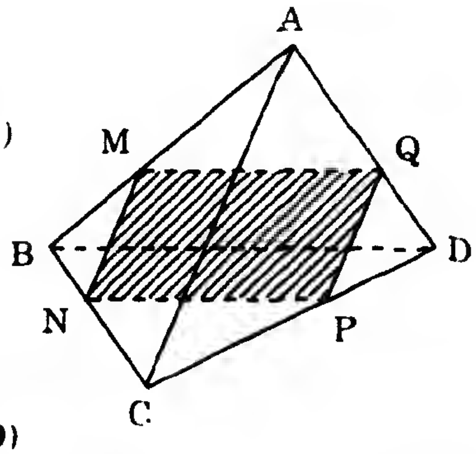
b) Thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (α) là hình gì?

Giải

a) • Ta có: $\left.\begin{array}{l} AC \parallel (\alpha) \\ AC \subset (ABC) \end{array}\right\}$

$\Rightarrow$ AC // giao tuyến của (α) và (ABC)

Do đó, trong (ABC), kẻ MN // AC (N $\in$ BC) thì MN = $(\alpha) \cap (ABC)$.



• Ta có: $\left.\begin{array}{l} BD \parallel (\alpha) \\ BD \subset (BCD) \end{array}\right\}$

$\Rightarrow$ BD // giao tuyến của (α) và (BCD)

Do đó, trong (BCD), kẻ NP // BD (P $\in$ CD) thì NP = $(\alpha) \cap (BCD)$.

• Ta có: $\left.\begin{array}{l} BD \parallel (\alpha) \\ BD \subset (ABD) \end{array}\right\} \Rightarrow$ BD // giao tuyến của (α) và (ABD).

Do đó, trong (ABD), kẻ MQ // BD (Q $\in$ AD) thì MQ = $(\alpha) \cap (ABD)$.

• Ta thấy P và Q là hai điểm chung của (α) và (ACD) nên PQ = $(\alpha) \cap (ACD)$.

b) Theo câu a), ta có:

$$\left.\begin{array}{l} MN // AC // PQ \\ NP // BD // MQ \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow$ MNPQ là hình bình hành.

Vậy thiết diện của tứ diện cắt bởi (α) là hình bình hành MNPQ.

Bài 9. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a) Chứng minh rằng CE // DF.

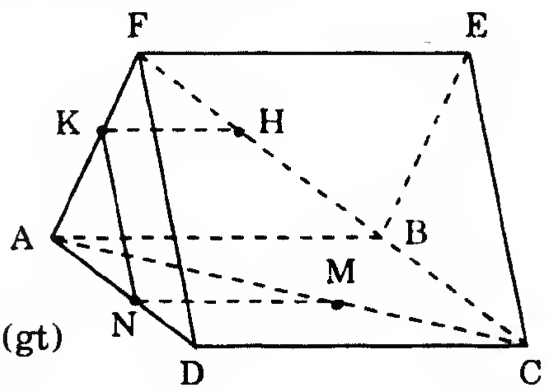
b) Gọi M và N lần lượt trên AC và AD sao cho $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AD} = \frac{1}{2009}$ và H, K lần lượt hai điểm trên BF và AF sao cho $\frac{FK}{FA} = \frac{PH}{PB} = \frac{2008}{2009}$.

Chứng minh rằng: MN // KH và NK // DF.

Giải

a) Ta có: ABCD và ABEF là các hình bình hành nên:

$$\begin{cases} DC // AB \text{ và } DC = AB \\ EF // AB \text{ và } EF = AB \end{cases}$$



$\Rightarrow$ DC // EF và DC = EF

$\Rightarrow$ DCEF là hình bình hành

$\Rightarrow$ CE // DF.

b) • Trong ΔACD, ta có: $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AD}$ (gt)

$\Rightarrow$ MN // CD

$\Rightarrow$ MN // AB (Vì CD // AB) (1)

• Trong ABF, ta có: $\frac{FK}{FA} = \frac{FH}{FB}$ (gt)

$\Rightarrow$ KH // AB (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ MN // KH.

Mặt khác: $\frac{FK}{FA} = \frac{2008}{2009}$

$\Leftrightarrow \frac{AK}{AF} = \frac{1}{2009} = \frac{AN}{AD} \Rightarrow$ NK // DF.

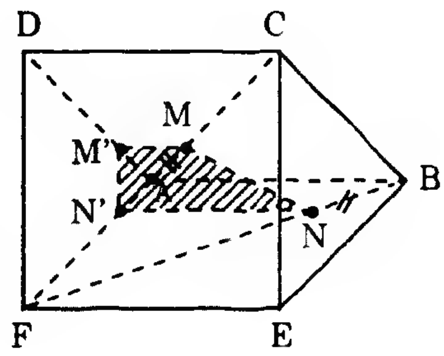
Bài 10. Cho hai hình vuông ABCD và ABEF có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đoạn thẳng AC và BF ta lấy điểm M, N sao cho AM = BN. (α) là mặt phẳng chứa MN và song song với AB cắt AD và AF lần lượt tại M', N'.

a) Tứ giác MNN'M' là hình gì?

b) Chứng minh rằng M'N' // CE.

c) Chứng minh rằng MN // (DEF).

Giải



a) Ta có: $\begin{cases} AB \parallel (\alpha) \\ AB \subset (ABCD) \\ (ABCD) \cap (\alpha) = MM' \end{cases}$

$\Rightarrow$ MM' // AB (1)

Chứng minh tương tự: NN' // AB (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ MM' // NN'

$\Rightarrow$ MNN'M' là hình thang.

b) Ta có:

• MM' // CD $\Rightarrow \dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AM}{AC}$ (1)

• NN' // AB $\Rightarrow \dfrac{AN'}{AF} = \dfrac{BN}{BF} = \dfrac{AM}{AC}$ (2)

$\left(\text{Vì } AM = BN \text{ (gt) và } BF = AC = AB\sqrt{2}\right)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{AM'}{AD} = \dfrac{AN'}{AF}$

$\Rightarrow$ M'N' // DF.

• Hơn nữa DCEF là hình bình hành

(Vì DC $\overset{=}{/\!/}$ AB $\overset{=}{/\!/}$ FE).

Nên M'N' // CE.

c) Ta có: $\begin{cases} MM' /\!/ CD \\ M'N' /\!/ CE \end{cases}$

(Do chứng minh trên)

$\Rightarrow (\alpha) \parallel (DCEF) \equiv (DEF)$

Mà MN $\subset$ (α) nên MN // (DEF).

Bài 11. Cho tứ diện ABCD. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACD và ABD. Chứng minh rằng $(G_1G_2G_3)$ // (BCD).

Giải

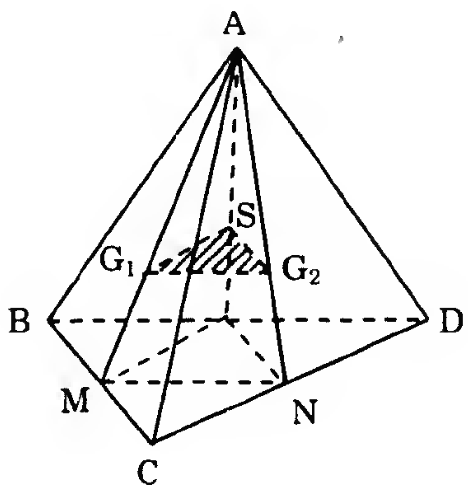
Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CD, BD.

Khi đó:

$$\begin{cases} G_1 \in AM, G_2 \in AN, G_3 \in AP \\ \dfrac{AG_1}{AM} = \dfrac{AG_2}{AN} = \dfrac{AG_3}{AD} = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} G_1G_2 \,//\, MN \\ G_1G_3 \,//\, MP \end{cases}$$

$\Rightarrow (G_1G_2G_3) \,//\, (MNP) \equiv (BCD)$.



Bài 12. Trong mặt phẳng (α) cho hình bình hành ABCD. Ta dựng các nửa đường thẳng song song với nhau và nằm về một phía đối với (α) lần lượt đi qua các điểm A, B, C, D. Một mặt phẳng (α') cắt bốn nửa đường thẳng nói trên tại A', B', C', D'. Chứng minh rằng:

a) (AA', BB') // (CC', DD').

b) A'B'C'D' là hình bình hành.

c) $AA' + CC' \geq 2\sqrt{BB'.DD'}$.

Giải

a) Ta có: $\begin{cases} AA' \,//\, DD' \\ AB \,//\, DC' \end{cases}$

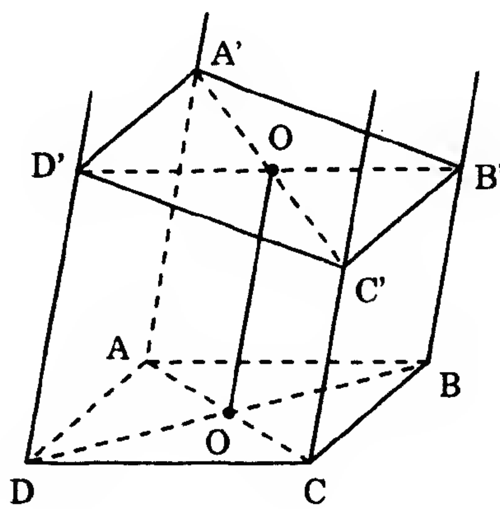
$\Rightarrow$ (AA', BB') // (CC', DD').

b) Ta có: $\begin{cases} (AA', BB') \,//\, (CC', DD') \\ (\alpha) \cap (AA', BB') = A'B' \\ (\alpha) \cap (CC', DD') = D'C' \end{cases}$

$\Rightarrow$ A'B' // D'C'

Chứng minh tương tự: A'D' // B'C'.

Vậy A'B'C'D' là hình bình hành.



c) Gọi $\{O\} = AC \cap BD$

$\{O'\} = A'C' \cap B'D'$

• Hình thang AA'C'C có OO' là đường trung bình nên

$AA' + CC' = 2OO'$

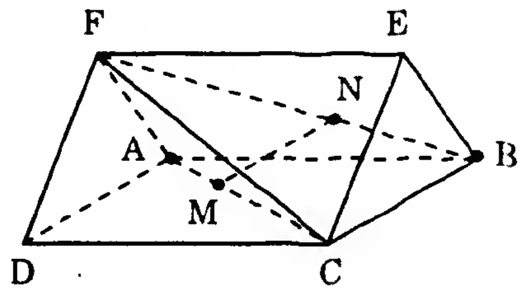
• Hình thang BB'D'D là hình bình hành nên $BB' + DD' = 2OO'$

Vì vậy: $AA' + CC' = BB' + DD' \geq \sqrt{BB'.DD'}$.

Bài 23. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không đồng phẳng. Trên các đoạn thẳng AC và BF lấy các điểm M, N sao cho $\frac{AM}{AC} = \frac{BN}{BP}$. Chứng minh rằng MN // (DEF).

Giải

Ta có: $\frac{AM}{AC} = \frac{SN}{BF}$



Theo định lý Thalès (đảo)

MN // (CDF) (Vì AB // (CDF),

CF $\subset$ (CDF))

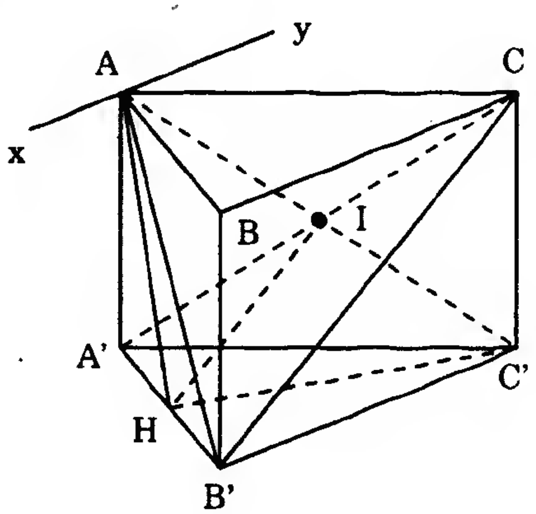
Vậy MN // (DEF).

Bài 14. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi H là trung điểm A'B'.

a) Chứng minh B'C // (AHC').

b) Tìm giao tuyến d của (AB'C') với (ABC).

Giải



a) Gọi I là tâm hình bình hành AA'C'C. Hơn nữa, H là trung điểm A'B' nên IH là đường trung bình $\Delta A'B'C'$.

Do đó: IH // B'C

Mà IH $\subset$ (AHC')

Vậy B'C // (AH'C).

b) Ta có: $A \in (AB'C') \cap (ABC)$

Mặt khác: $\begin{cases} B'C' // BC \\ B'C' \subset (AB'C') \\ BC \subset (ABC) \end{cases}$

$\Rightarrow (AB'C') \cap (ABC) = xAy$

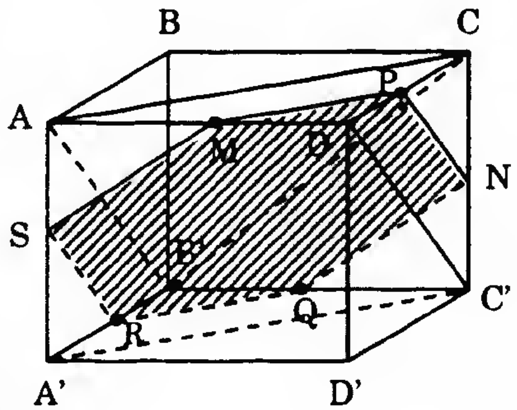
(Với xAy là đường thẳng qua A và song song với BC).

Bài 15. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. M, N là hai điểm trên cạnh AD và CC' sao cho $\frac{AM}{AD} = \frac{CN}{CC'}$.

a) Chứng minh rằng: MN // (AB'C).

b) Xác định thiết diện của hình hộp với mặt phẳng (α) qua MN và song song với (AB'C).

Giải



a) Kẻ MP // AC (P ∈ CD) (1)

Khi đó: $\frac{CP}{CD} = \frac{AM}{AD} = \frac{CN}{CC'}$

$\Rightarrow$ NP // C'D

Mà C'D' // AB;

$\Rightarrow$ NP // AB' (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ (MNP) // (AB'C)

$\Rightarrow$ MN // (AB'C) (Vì MN $\subset$ (MNP)).

b) Gọi Q, R, S lần lượt là các giao điểm (α) với B'C', A'B' và AA'.

- Ta có:

$\begin{cases} (\alpha) \equiv (MNP) \ // \ (AB'C) \\ (BB', CC') \cap (\alpha) = NQ \\ (BB', CC') \cap (AB'C) = B'C \end{cases}$

$\Rightarrow$ NQ // B'C (1)

- Ta có:

$\begin{cases} MP // (A'B'C'D') \ (\text{Vì } MP // AC // A'C' \subset (A'B'C'D')) \\ MP \subset (\alpha) \\ (\alpha) \cap (A'B'C'D') = QR \end{cases}$

$\Rightarrow QR \parallel MP$

$\Rightarrow QR \parallel A'C'$ (2)

- Chứng minh tương tự như (1), ta cũng có:

  $RS \parallel AB'$ (3)

- Chứng minh tương tự như (2), ta cũng có:

  $SM \parallel A'D$ (4)

Suy ra: (α) cắt các mặt của hình hộp theo các giao tuyến MP, PN, NQ, QR, RS và SM. (Với $MP \parallel AC$, $PN \parallel C'D$, $NQ \parallel B'C$, $QR \parallel A'C'$, $RS \parallel AB'$ và $SM \parallel A'D$).

Vậy MPNQRS là thiết diện cần tìm.

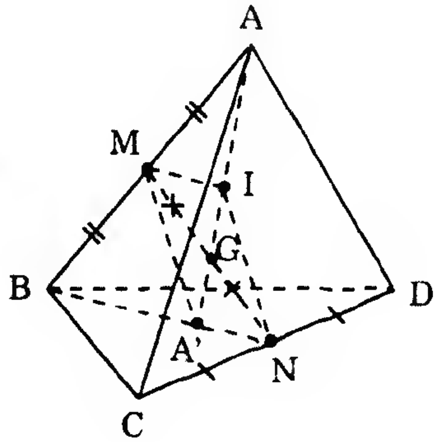
Bài 16. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và G là trung điểm của MN.

a) Chứng minh rằng đường thẳng AG đi qua trọng tâm ΔBCD. Phát biểu kết luận tương tự đối với các đường thẳng BG, CG, DG.

b) Chứng minh rằng: $GA = 3GA'$.

Giải

a) • Trong (ABN), AG cắt BN tại A'.



• Kẻ $MI \parallel BN$ ($I \in AA'$)

• Xét $\Delta ABA'$ ta có MI là đường trung bình nên $MI = \frac{1}{2}BA'$ (1)

• Ta có MINA' là hình bình hành nên $MI = A'N$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BA' = 2A'N$

$\Rightarrow$ A' trọng tâm ΔBCD.

Chứng minh tương tự ta cũng có BG đi qua trọng tâm B' của ΔACD, CG đi qua trọng tâm C' của ΔABD và DG đi qua trọng tâm D' của ΔABC.

b) Theo câu a), ta suy ra rằng: $\begin{cases} GI = GA' \\ IA = IA' \end{cases}$

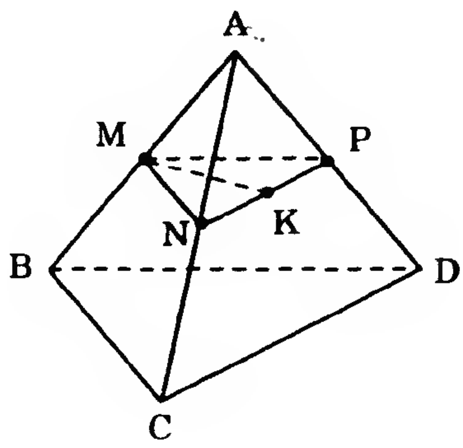
$\Rightarrow GA = IA + IG = 2GA' + GA' = 3GA'$.

Bài 17. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, AD và K là một điểm bất kỳ trên NP. Chứng minh rằng:

a) (MNP) // (BCD).

b) MK // (BCD).

Giải



a) Ta có:

$$\begin{cases} MN // BC \\ MP // BD \end{cases}$$

(Tính chất đường trung bình)

$\Rightarrow$ (MNP) // (BCD)

b) Ta có:

$$\begin{cases} (MNP) // (BCD) \\ MK \subset (MNP) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ MK // (BCD).

Bài 18. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi M và M' lần lượt là trung điểm của BC và B'C'.

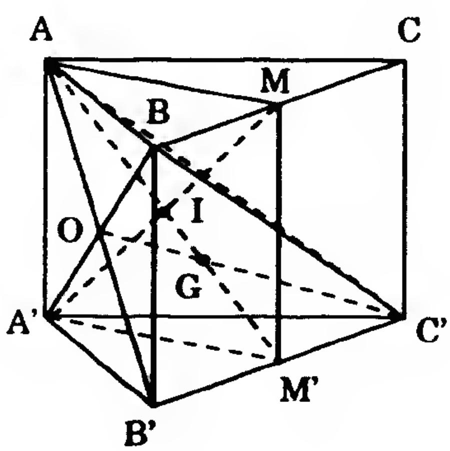
a) Chứng minh rằng: AM // A'M'.

b) Tìm giao điểm của A'M với (AB'C').

c) Tìm giao tuyến d của (AB'C') và (A'BC').

d Tìm giao điểm G của d với (AA'M). Chứng minh rằng G là trọng tâm ΔAB'C'.

Giải



a) Ta có:

$$\begin{cases} MM' // BB' \\ MM' = BB' \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} MM' // AA' \\ MM' = AA' \end{cases}$$

$\Rightarrow$ AA'M'M là hình bình hành.

$\Rightarrow$ AM // A'M'.

b) Gọi {I} = AM' ∩ A'M (Trong (AA'M'M)).

Ta có: $\begin{cases} I \in A'M \\ I \in AM' \subset (A'B'C') \end{cases}$

$\Rightarrow$ {I} = A'M ∩ (AB'C').

c) Gọi {O} = AB' ∩ A'B (Trong (AA'B'B))

Khi đó: O ∈ AB' ⊂ (AB'C')

O ∈ A'B ⊂ (A'BC')

$\Rightarrow$ O ∈ (AB'C') ∩ (A'BC')

Hơn nữa: C' ∈ (AB'C') ∩ (A'BC')

Vậy: OC' = (AB'C') ∩ (A'BC').

d) • Gọi {G} = OC' ∩ AM' (Trong (AB'C')).

Khi đó: $\begin{cases} G \in OC' \\ G \in AM' \subset (AA'M) \end{cases}$

$\Rightarrow$ {G} = OC' ∩ (AA'M)

• Trong ΔAB'C' có AM' và C'O là hai trung tuyến

Nên AM' ∩ C'O = {G} chính là trọng tâm ΔAB'C'.

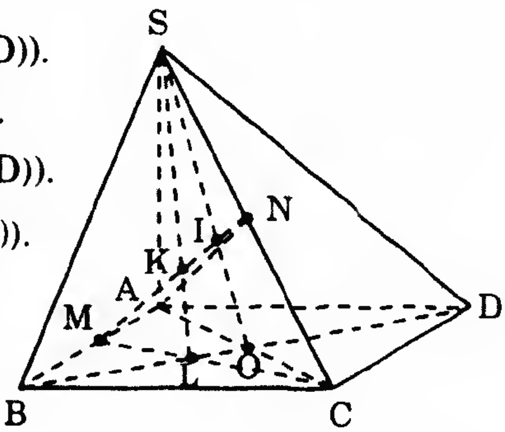
Bài 19. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có ABCD là hình bình hành. Gọi M và N theo thứ tự là trung điểm của AB và SC.

a) Xác định giao điểm I và K của (SBD) với AN và MN tương ứng.

b) Tính tỷ số $\dfrac{KM}{KN}$.

c) Chứng minh rằng B, I, K thẳng hàng. Tính tỷ số $\dfrac{IB}{IK}$.

Giải



a) Gọi {O} = AC ∩ BD (Trong (ABCD)).

{I} = SO ∩ AN (Trong (SAC)).

{L} = CM ∩ BD (Trong (ABCD)).

{K} = SL ∩ NM (Trong (SMC)).

Khi đó:

$\begin{cases} AN \cap (SBD) = \{I\} \\ MN \cap (SBD) = \{K\} \end{cases}$

b) Kẻ NE // CM (E ∈ SL).

Ta có: $\begin{cases} NE // CL \\ NE = \dfrac{1}{2}CL \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} NE // ML \\ NE = ML \end{cases}$

$\left(\text{Vì } ML = \dfrac{1}{2}CL \text{ (Tính chất trọng tâm)}\right)$

$\Rightarrow$ NEML là hình bình hành

$\Rightarrow \dfrac{KM}{KN} = 1.$

(Chú ý rằng: $\overrightarrow{SK} = 3\overrightarrow{KI}$)

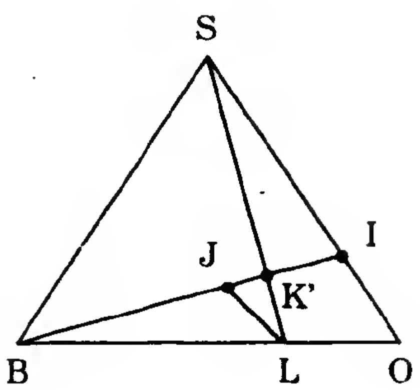
c) Kẻ LJ // SO (J ∈ BI)

Ta có: $\begin{cases} JL // IO \\ JL = \dfrac{2}{3}IO \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} JL // SI \\ JL = \dfrac{1}{3}SI \end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{SK'} = 3\overrightarrow{K'L}$

$\Rightarrow K \equiv K'$ (Vì $\overrightarrow{SK} = 3\overrightarrow{KL}$)

$\Rightarrow$ B, I, K thẳng hàng và $\dfrac{IB}{IK} = 4.$



C/ BÀI TẬP NÂNG CAO

Bài 1. Cho tứ diện ABCD. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên cạnh BD, ta lấy điểm K sao cho BK = 2KD.

a) Tìm giao điểm E của CD với (IJK). Chứng minh rằng DC = DE.

b) Tìm giao điểm F của AD với (IJK). Chứng minh rằng FA = 2FD.

c) Chứng minh rằng FK // IJ.

d) Gọi M và N là hai điểm bất kỳ lần lượt nằm trên AB và CD. Tìm giao điểm của MN với (IJK).

Giải

a) Trong (BCD), JK cắt CD tại E, thì E chính là giao điểm của CD với (IJK).

• Kẻ DH // BC (H ∈ JE)

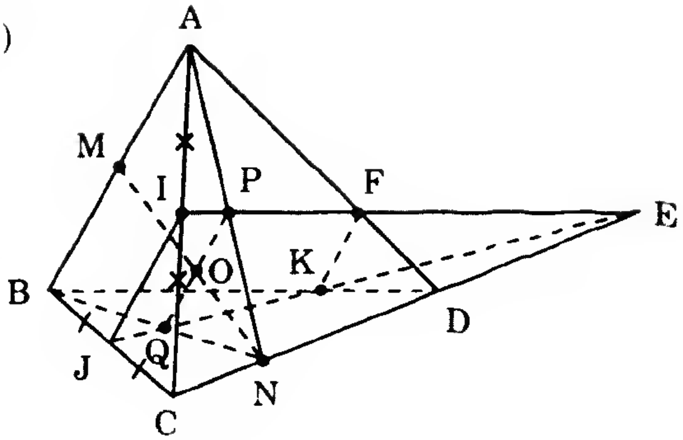
Ta có: $\frac{DH}{BJ} = \frac{DK}{KB} = \frac{1}{2}$ (gt)

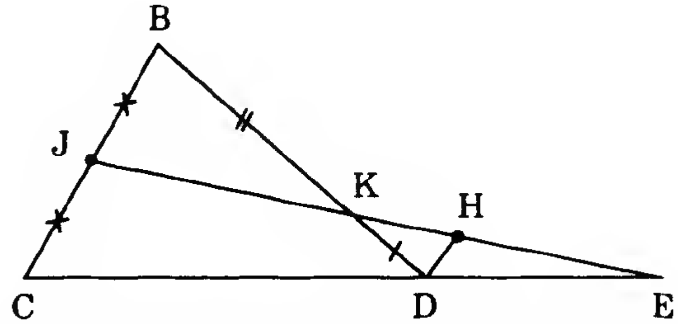
$\Rightarrow DH = \frac{1}{2}BJ = \frac{1}{2}CJ$

$\Rightarrow$ DH là đường trung bình của ΔCEJ

$\Rightarrow$ D trung điểm CE.

Vậy CD = DE.





b) • Trong (ACD), IE cắt AD tại F, thì F chính là giao điểm của AD với (IJK).

• Rõ ràng F là trọng tâm ΔCAE nên FA = 2FD.

c) Ta có: $\frac{DF}{FA} = \frac{DK}{KB} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow FK // AB$

Mà $AB // JI$

$\Rightarrow FK // IJ$

d) Gọi $\begin{cases} \{O\} = BN \cap JK \\ \{P\} = AN \cap IF \end{cases}$

$\Rightarrow PQ = (IJK) \cap (ABN)$

Trong (ABN), M cắt PQ tại O.

Khi đó O chính là giao điểm của MN với (IJK).

Bài 2. Cho lăng trụ tam giác ABC.A'B'C'. Gọi G, G' lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và A'B'C'. Mặt phẳng (α) cắt AA', BB', CC', GG' lần lượt tại A_1, B_1, C_1 và G_1. Chứng minh rằng:

a) GG' // AA'.

b) G_1 là trọng tâm tam giác $A_1B_1C_1$.

c) $G_1G' = \frac{1}{3}(A_1A' + B_1B' + C_1C')$.

d) $G_1G = \frac{1}{3}(A_1A + B_1B + C_1C)$.

Giải

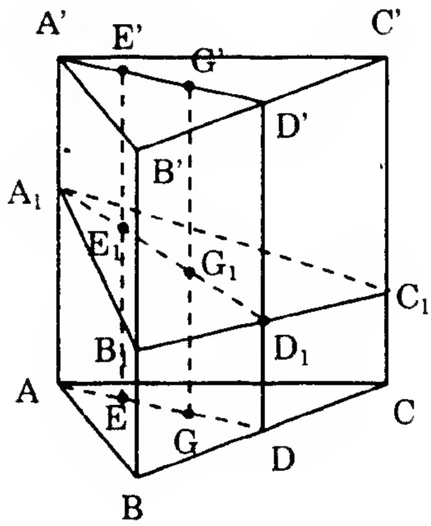
a) Gọi D, D', D_1 lần lượt là trung điểm các cạnh BC, B'C', B_1C_1. Rõ ràng AA'D'D là hình bình hành.

Mặt khác:

$$\frac{A'G'}{G'D'} = \frac{AG}{GD} = 2$$

(Tính chất trọng tâm)

Do đó: $\begin{cases} GG' // AA' \\ GG' = AA' \end{cases}$



b) Ta có:

$$\frac{A_1G_1}{G_1D_1} = \frac{A'G'}{G'D'} = 2$$

$\Rightarrow A_1G_1 = 2G_1D_1$.

$\Rightarrow G_1$ là trọng tâm $\Delta A_1B_1C_1$.

c) d) Gọi E, E', E_1 lần lượt là trung điểm các đoạn AG, A'G', A_1G_1.

Khi đó, theo tính chất đường trung bình của hình thang, ta có:

$$+\begin{cases} 2E_1E = A_1A + G_1G,\ 2E_1E' = A_1A' + G_1G' \\ 4G_1G = 2(E_1E + D_1D),\ 4G_1G' = 2(E_1E' + D_1D') \\ 2D_1D = B_1B + C_1C,\ 2D_1D' = B_1B' + C_1C' \end{cases}$$

$\Rightarrow 3G_1G = A_1A + B_1B + C_1C,\ 3G_1G' = A_1A' + B_1B' + C_1C'$

Vậy: $\begin{cases} G_1G = \frac{1}{3}(A_1A + B_1B + C_1C) \\ G_1G' = \frac{1}{3}(A_1A' + B_1B' + C_1C') \end{cases}$

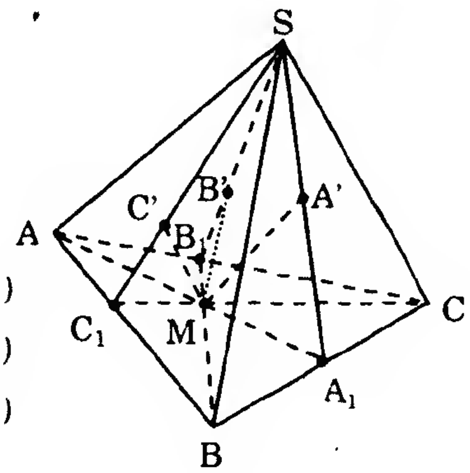
Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD. M nằm bên trong tam giác ABC. Kẻ MA' // SA, MB' // SB, MC' // SC (A' ∈ (SBC), B' ∈ (SCA), C' ∈ (SAB)).

a) Tùy theo vị trí của M, hãy trình bày cách dựng các điểm A', B', C'.

b) Chứng minh rằng, khi M thay đổi thì giá trị của đại lượng sau $\frac{MA'}{SA}+\frac{NB'}{SB}+\frac{MC'}{SC}$ là hằng số.

c) Xác định vị trí của M, để đại lượng $\frac{MA'.MB'.MC'}{SA.SB.SC}$ nhận giá trị lớn nhất.

Giải



a) Gọi $\begin{cases}\{A_1\} = AM \cap BC\\ \{B_1\} = BM \cap CA\\ \{C_1\} = CM \cap AB\end{cases}$

- Trong SAA_1, kẻ MA' // SA (A' ∈ SA_1)
- Trong SBB_1, kẻ MB' // SB (B' ∈ SB_1)
- Trong SCC_1, kẻ MC' // SC (C' ∈ SC_1)

Suy ra: A', B', C' hoàn toàn xác định theo vị trí của M.

b) Theo định lý Talét, ta có:

$$\frac{MA'}{SA}=\frac{MA_1}{AA_1}=\frac{S_{\triangle MBC}}{S_{\triangle ABC}}$$

$$+\quad \frac{MB'}{SB}=\frac{MB_1}{BB_1}=\frac{S_{\triangle MCA}}{S_{\triangle ABC}}$$

$$\frac{MC'}{SC}=\frac{MC_1}{CC_1}=\frac{S_{\triangle MAB}}{S_{\triangle ABC}}$$

$$\Rightarrow \frac{MA'}{SA}+\frac{MB'}{SB}+\frac{MC'}{SC}=\frac{S_{\triangle MBC}+S_{\triangle MCA}+S_{\triangle MAB}}{S_{\triangle ABC}}=1.$$

c) Theo bất đẳng thức cần chứng minh:

$$1=\frac{MA'}{SA}+\frac{MB'}{SB}+\frac{MC'}{SC}\ge 3\sqrt[3]{\frac{MA'.MB'.MC'}{SA.SB.SC}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{MA'.MB'.MC'}{SA.SB.SC} \le \frac{1}{27}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \frac{MA'}{SA} = \frac{MB'}{SB} = \frac{MC'}{SC}$

$\Leftrightarrow S_{\Delta MBC} = S_{\Delta MCA} = S_{\Delta MAB}$

$\Leftrightarrow$ M trọng tâm ΔABC.

(Bạn đọc tự kiểm tra).

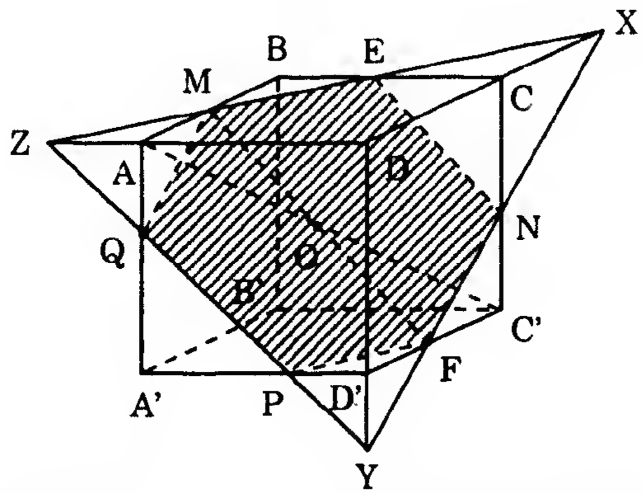
Vậy: $Max\left(\frac{MA'.MB'.MC'}{SA.SB.SC}\right) = \frac{1}{27}$

Bài 4. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Gọi độ dài ba cạnh xuất phát từ một đỉnh là a, b, c và O là tâm thích hợp.

a) Vẽ thiết diện của hình hộp đi qua trung điểm M và N của các cạnh AB, CC', và tâm O.

b) Chứng minh rằng tổng bình phương các khoảng từ một điểm S bất kỳ trong không gian đến tám đỉnh của hình hộp bằng $2(a^2 + b^2 + c^2) + 8SO^2$.

Giải



a) Gọi F là trung điểm C'D', và O là trung điểm AC'.

Kẻ NF cắt CC', DD' lần lượt tại X, Y.

Kẻ XM cắt BC, AD lần lượt tại E, Z.

Kẻ YZ cắt AA', A'D' lần lượt tại Q, P.

Khi đó, thiết diện cần tìm là lục giác MENFPQ

b) Áp dụng công thức về trung tuyến trong tam giác, ta có:

$$SA^2 + SC'^2 = 2SO^2 + \frac{1}{2}AC'^2$$

$$SB^2 + SD'^2 = 2SO^2 + \frac{1}{2}BD'^2$$

$$+ \quad SC^2 + SA'^2 = 2SO^2 + \frac{1}{2}CA'^2$$

$$SD^2 + SB'^2 = 2SO^2 + \frac{1}{2}DB'^2$$

$$\Sigma = SA^2 + SB^2 + SC^2 + SD^2 + SA'^2 + SB'^2 + SC'^2 + 8SO^2$$

$$+ \frac{1}{2}(AC'^2 + BD'^2 + CA'^2 + DB'^2) \qquad (1)$$

Hơn nữa, trong một hình bình hành tổng các bình phương hai đường chéo bằng tổng các bình phương bốn cạnh.

Khi đó, với $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$ thì

$$AC'^2 + CA'^2 = 2(AC^2 + C^2)$$

$$+ \quad BD'^2 + DB'^2 = 2(BD^2 + C^2)$$

$$\Rightarrow AC'^2 + CA'^2 + BD'^2 + DB'^2 = 2(AC^2 + BD^2 + 2C^2)$$

$$= 2(2(a^2 + b^2) + 2c^2)$$

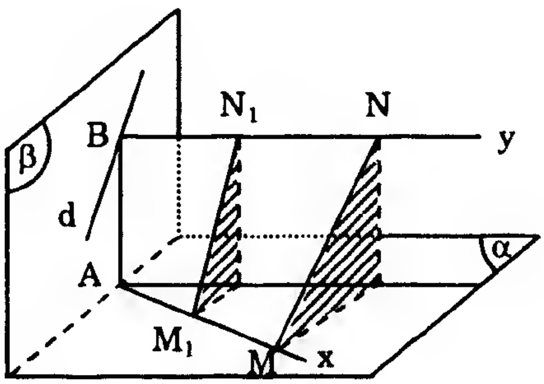
$$= 4(a^2 + b^2 + c^2) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\Sigma = 8SO^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2).$$

Bài 5. Trên hai tia Ax và By chéo nhau, ta lần lượt lấy hai điểm M và N sao cho AM = 2008BN. Chứng minh rằng MN luôn song song với một mặt phẳng cố định.

Giải



Trên Ax, By lấy lần lượt các điểm M_1, N_1 sao cho:

$AM_1 = 2008BN_1 = 2008$.

Khi đó: $\dfrac{AM_1}{BN_1} = \dfrac{AM}{BN} = 2008$

Nên theo định lý Thalès đảo thì MN luôn song song với mặt phẳng cố định (A, Bd), với Bd là đường thẳng qua B và song song với M_1N_1.

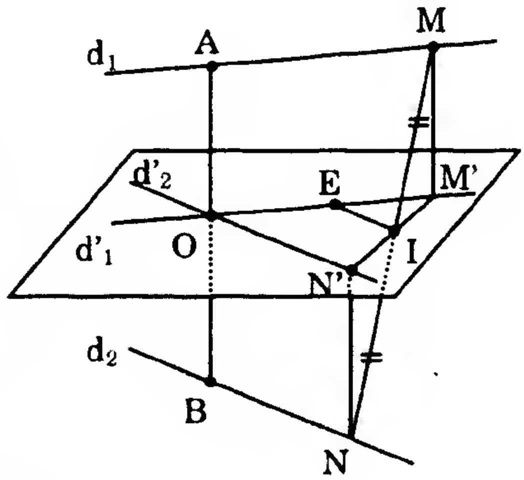
Bài 6. Cho hai đường thẳng chéo d_1 và d_2. M là một điểm chuyển động trên d_1 và N là điểm chuyển động trên d_2. Tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn MN.

Giải

• *Phần thuận:*

A cố định $\in d_1$, B cố định $\in d_2$ và O là trung điểm đoạn AB. Khi đó:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{IM}{IN} = 1$$



Theo định lý Thales đảo thì OI nằm trong mp(d'_1, d'_2), với d'_1 và d'_2 qua O lần lượt song song với d_1 và d_2.

• *Giới hạn*: M và N lần lượt chạy trên d_1 và d_2 không có ràng buộc nên I chạy tùy ý trên mp(d'_1, d'_2).

• *Phần đảo:* Lấy một điểm I $\in$ mp(d'_1, d'_2). Qua I dựng đường thẳng song song với d'_2 và cắt d'_1 tại E. Lấy M' là điểm đối xứng với O qua E.

M'I cắt d'_2 tại N'. Theo định lý về đường trung bình cho thấy I là trung điểm của M'N'. Từ M' và N' kẻ các đường thẳng song song với AB và chúng lần lượt cắt d_1 và d_2 tại M và N.

Rõ ràng, hai tứ giác OM'MA và ON'NB là những hình bình hành.

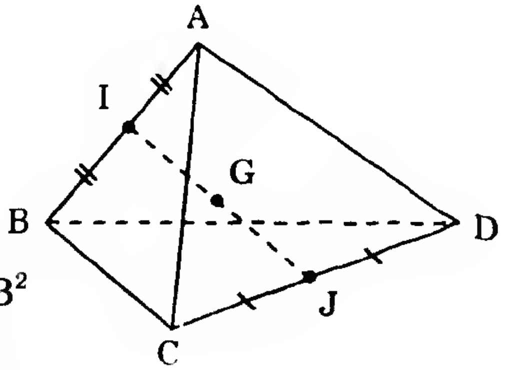
Suy ra: MN'NM' là hình bình hành, do đó I là trung điểm của MN.

• *Kết luận:* Qũy tích trung điểm I của đoạn MN là mp(d'_1, d'_2).

Bài 7. Cho tứ diện ABCD. Tìm điểm M trong không gian sao cho:

$\Sigma = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Giải



Gọi J, J, G lần lượt là trung điểm của AB, CD, IJ. Theo công thức về trung tuyến trong tam giác, ta có:

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

$+$

$$MC^2 + MD^2 = 2MJ^2 + \frac{1}{2}CD^2$$

$$\Rightarrow \Sigma = 2(MI^2 + MJ^2) + \frac{1}{2}(AB^2 + CD^2)$$

$$= 2(2MG^2 + \frac{1}{2}IJ^2) + \frac{1}{2}(AB^2 + CD^2)$$

$$= 4MG^2 + IJ^2 + \frac{1}{2}(AB^2 + CD^2)$$

$$\geq IJ^2 + \frac{1}{2}(AB^2 + CD^2) = \text{const}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow M \equiv G$

Vậy: $\Sigma = MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M trùng với G.

Bài 8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Mặt phẳng (α) cắt SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D'. Chứng minh rằng:

$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$$

(Bộ đề tuyển sinh)

Giải

Gọi $\{O'\} = A'C' \cap B'D'$

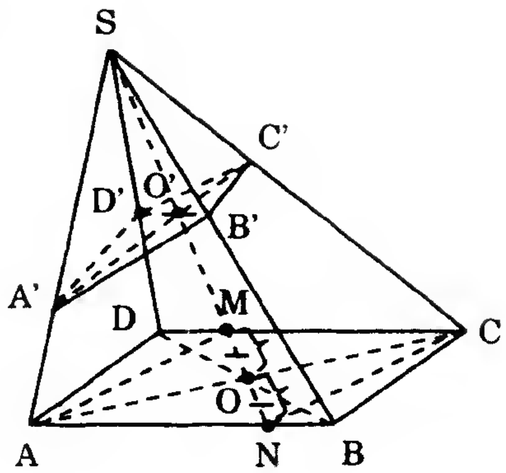
Khi đó: $\begin{cases} O' \in A'C' \subset (SAC) \\ O' \in B'D' \subset (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow O' \in (SAC) \cap (SBD) = SD$

(Với O là tâm hình hành ABCD)

Tiếp đến, kẻ AM, CN // A'C'

(M, N $\in$ SO). Ta có:



$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SM}{SO'} + \frac{SN}{SO'}$$

$$= \frac{SO - OM}{SO'} + \frac{SO + ON}{SO'} = \frac{2SO}{SO'}$$

(Chú ý là OM = ON) (1)

Chứng minh tương tự:

$$\frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = \frac{2SO}{SO'} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'}$.

Bài 9. Cho ba tia Ox, Oy, Oz sao cho $\widehat{xOy} = \widehat{zOx} = 45^0$ và $\widehat{yOz} = 90^0$.
Chứng minh rằng: Ox, Oy, Oz đồng phẳng.

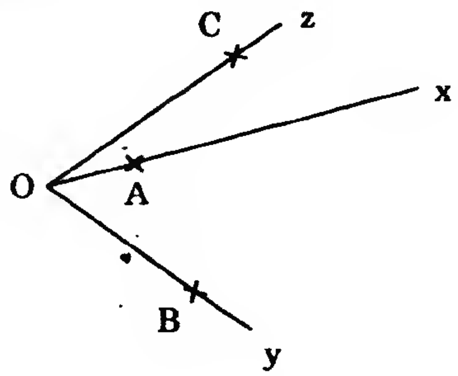
Giải

Lấy A $\in$ Ox, B $\in$ Oy và C $\in$ Oz sao cho OA = 1 và OB = OC = $\sqrt{2}$

$AB = AC = \sqrt{OA^2 + OB^2 - 2AO.AB\cos 45^0}$

$= \sqrt{1 + 2 - 2\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 \quad (1).$

$BC = \sqrt{OB^2 + OC^2} = \sqrt{2 + 2} = 2 \quad (2)$



Từ (1) và (2) suy ra: AB + AC = BC

$\Rightarrow$ A, B, C thẳng hàng.

$\Rightarrow$ Ox, Oy, Oz đồng phẳng.

Bài 10. Cho ba tia Ox, Oy, Oz thỏa điều kiện $\widehat{xOy} = 60^0$, $\widehat{yOz} = 90^0$ và $\widehat{zOx} = 120^0$.

a) Chứng minh rằng: Ox, Oy, Oz không đồng phẳng.

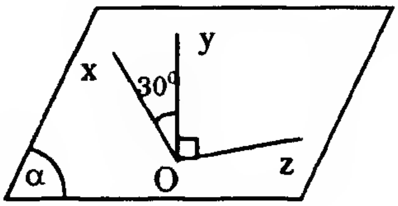
b) M $\in$ Ox, N $\in$ Oy, P $\in$ Oz sao cho OM = ON = OP = a > 0.
Chứng minh rằng: ΔMNP vuông.

c) $A \in Ox$, $B \in Oy$, $C \in Oz$ sao cho $\dfrac{1}{OA} + \dfrac{1}{OB} + \dfrac{1}{OC} = 2008$.

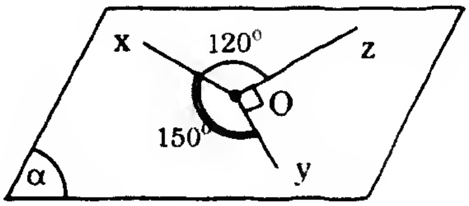
Chứng minh rằng: (ABC) luôn đi qua một điểm cố định.

Giải

a)



(Hình 1)

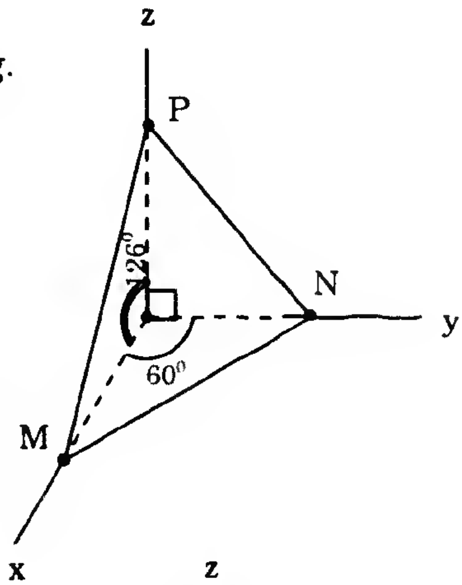


(Hình 2)

Nếu Ox, Oy, Oz đồng phẳng ta có hai khả năng:

- Nếu Oy nằm trong miền góc $\widehat{xOz}$ (hình 1) thì $\widehat{xOy} = 30^0 < 60^0$ (Trái với giả thiết).
- Nếu Oy nằm ngoài miền góc $\widehat{xOz}$ (hình 2) thì $\widehat{xOy} = 150^0 > 60^0$ (Trái với giả thiết).

Vậy: Ox, Oy, Oz không đồng phẳng.

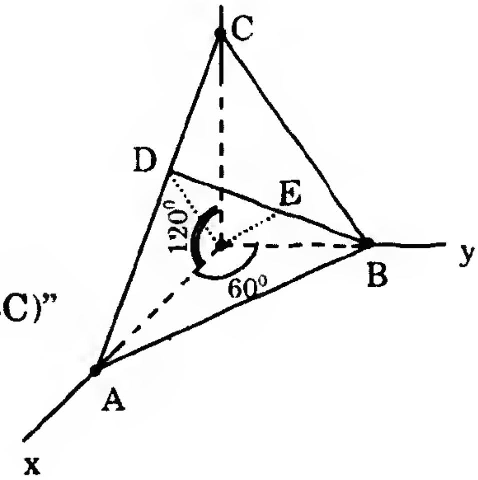


b) Theo định lý hàm cosin, ta có:

- $MN = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a.a.\frac{1}{2}} = a$
- $NP = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$
- $PM = \sqrt{a^2 + a^2 - 2a.a.\left(-\frac{1}{2}\right)} = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow PM^2 = MN^2 + NP^2$

$\Rightarrow \Delta MNP$ vuông tại N.



c) Trước hết, ta chứng minh bổ đề:

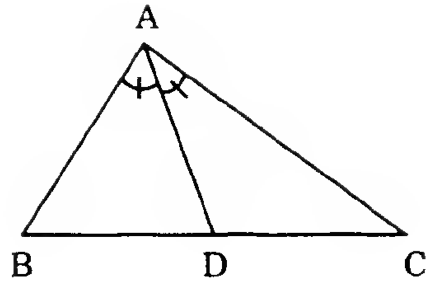
"Cho AD là đường phân giác trong của góc A của tam giác ABC bất kỳ, ta luôn có:

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{2\cos\frac{A}{2}}{AD} \text{ (Với } D \in BC)"$$

Quả vậy: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ADB} + S_{\Delta ADC}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.AC.\sin A$

$= \frac{1}{2}AD(AB + AC)\sin\frac{A}{2}$



$\Leftrightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{2\cos\frac{A}{2}}{AD}$

$\Rightarrow$ Bổ đề trên được chứng minh xong.

Quay lại bài toán. Kẻ OD là phân giác trong $\widehat{AOC}$ và OE là phân giác trong $\widehat{BOD}$ ($D \in AC$, $E \in BD$).

Khi đó, theo bổ đề trên ta có:

$$\begin{cases} \frac{1}{OA} + \frac{1}{OC} = \frac{2\cos 60^0}{OD} = \frac{1}{OD} \\ \frac{1}{OB} + \frac{1}{OD} = \frac{2\cos\varphi}{OE} \text{ (Với } 2\varphi = \widehat{BOD} = \text{const)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2008 = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \frac{1}{OC} = \frac{2\cos\varphi}{OE}$$

$$\Rightarrow OE = \frac{1}{2004}\cos\varphi = \text{const}$$

$\Rightarrow$ E cố định.

Vậy, khi A, B, C lưu động sao cho $\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} + \frac{1}{OC} = 2008$ thì (ABC) lưu động nhưng luôn đi qua điểm E cố định.

D/ BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ÔN TẬP CHƯƠNG II

Bài 1. Câu nào sau đây sai? Một mặt phẳng được xác định bởi:

☐ a. Ba điểm không thẳng hàng.

☐ b. Một điểm và một đường thẳng không đi qua nó.

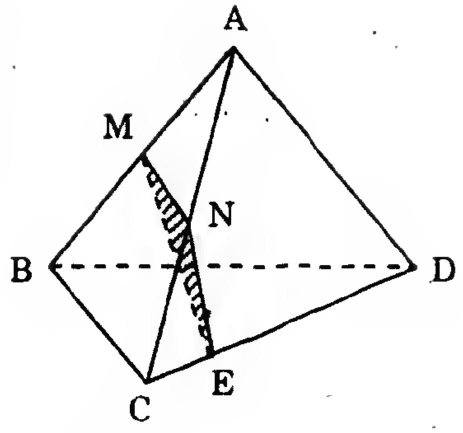
☐ c. Hai đường thẳng cắt nhau.

☐ d. Hai đường thẳng phân biệt.

Bài 2. Cho hình chóp S.ABCD, AC và BD cắt nhau tại M, AB và CD cắt nhau tại N. Khi đó, (SAC) và (SBD) có giao tuyến là:

☐ a. SM. ☐ b. SN. ☐ c. SA. ☐ d. MN.

Bài 3. Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC. E là điểm trên CD với ED = 3EC. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện ABCD là:



☐ a. Tam giác MNE.

☐ b. Tứ giác MNEF, F ∈ BD.

☐ c. Hình bình hành MNEF (với F ∈ BD, EF // BC).

☐ d. Hình thang MNEF (với F ∈ BD, EF //BC).

Bài 4. Cho hình bình hành ABCD. Gọi Bx, Cy, Dz là các đường thẳng qua B, C, D và song song nhau. Một mặt phẳng (α) đi qua A và cắt Bx, Dy, Cz lần lượt tại B', C', D' với BB' = 2, DD' = 4. Khi đó CC' bằng:

☐ a. 5. ☐ b. 6. ☐ c. 7. ☐ d. 8.

Bài 5. Cho hình hộp ABCD.A'B'C'D'. Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau:

☐ a. BD // B'D'. ☐ b. AD' // BC'.

☐ c. BB' // AD'. ☐ d. AC // A'C'.

Bài 6. Hãy tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau:

☐ a. Hình lập phương có 6 mặt là 6 hình vuông bằng nhau.

☐ b. Hình lập phương có 4 đường chéo bằng nhau.

☐ c. Hình lập phương có 8 đỉnh.

☐ d. Hình lập phương có 16 cạnh bằng nhau.

Bài 7. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

☐ a. Hai đáy của lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.

☐ b. Hình lăng trụ có các mặt bên là hình bình hành bằng nhau.

☐ c. Lăng trụ có đáy là ngũ giác đều gọi là hình hộp.

☐ d. Hình lăng trụ có hai đáy là hai hình bình hành bằng nhau.

Bài 8. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N là trung điểm BC, BD tương ứng; P là điểm bất kỳ thuộc cạnh AB (P ≠ A, B). Gọi giao điểm của AN và DP là I, giao điểm của AM và CP là J. Nhận xét gì về bốn điểm M, N, I, J.

☐ a. Bốn điểm thuộc cùng mặt phẳng.

☐ b. Tứ giác MNIJ là hình thoi.

☐ c. Tứ giác MNIJ là hình thang.

☐ d. Tứ giác MNIJ là hình bình hành.

Bài 9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi. Gọi G là trọng tâm ΔSAD. Xác định thiết diện tạo bởi (BCG) và hình chóp. Thiết diện là hình gì?

☐ a. Hình thang. ☐ b. Hình tam giác.

☐ c. Hình thoi. ☐ d. Hình lục giác.

Bài 10. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang, AB // CD, $CD = \frac{1}{2}AB$. Gọi M là điểm thuộc cạnh SC sao cho $MC = \frac{1}{2}MS$. Gọi N là giao điểm của DM và mặt phẳng (SAB). Nhận xét gì về hình dạng của tứ giác SABN.

☐ a. Hình vuông.

☐ b. Hình bình hành.

☐ c. Tứ giác lồi.

☐ d. Hình thang cân.

Bài 11. Cho tứ diện ABCD. Gọi G_1 và G_2 lần lượt là trọng tâm tam giác BCD và tam giác ACD. Câu nào sau đây sai?

☐ a. $G_1G_2 = \frac{1}{3}AB$.

☐ b. G_1G_2 // (ABD).

☐ c. AG_2, BG_1, BC đồng quy.

☐ d. AG_1, BG_2 chéo nhau.

Bài 12. Cho tứ diện ABCD. Gọi I và J lần lượt là trung điểm cạnh BC và BD. Mặt phẳng (α) qua IJ song song với AD và cắt AD, AC lần lượt tại H và K. Câu nào sau đây đúng?

☐ a. IJHK là hình thoi có chu vi bằng 2a.

☐ b. IJ là hình thang cân có HK ≥ IJ.

☐ c. IH = IK.

☐ d. IJHK là hình bình hành có chu vi bằng 4a.

Bài 13. Cho tứ diện ABCD. Gọi I và J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và ABD. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

☐ a. IJ // (ABC).

☐ b. IJ // (ABD).

☐ c. IJ // (ACD).

☐ d. IJ // (AEF) với E và F lần lượt là trung điểm của BC và BD.

Bài 14. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông tâm O. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SD. P là trung điểm của DN. Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

☐ a. MP // (ABC).
☐ b. MP // (SBC).

☐ c. AC // MP.
☐ d. MP // (SAD).

ĐÁP ÁN

Bài	1	2	3	4	5	6	7
Đáp án	d	a	d	b	c	d	a
Bài	8	9	10	11	12	13	14
Đáp án	c	a	b	d	a	c	b

Chương III.

VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN. QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

A/ TÓM TẮT GIÁO KHOA

§1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Hoàn toàn tương tự như vectơ đã biết trong mặt phẳng, ta cũng có vectơ trong không gian. Điều nói thêm về vectơ trong không gian là khái niệm ba vectơ đồng phẳng.

1. *Định nghĩa:* Trong không gian, ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.

2. ***Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng***

Định lý 1: Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}, \vec{b}$ và một vectơ $\vec{c}$. Khi đó, ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đồng phẳng khi và chỉ khi có cặp số m, n duy nhất sao cho $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

Định lý 2: Cho $\vec{a}, \vec{b}$ và $\vec{c}$ là ba vectơ không đồng phẳng. Khi đó, với mọi vectơ $\vec{x}$ trong không gian, ta đều tìm được bộ ba số m, n, p duy nhất sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b} + p\vec{c}$.

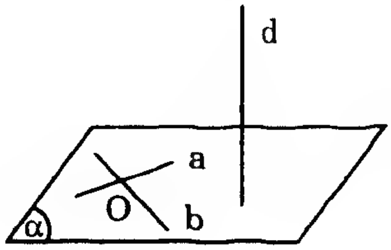
§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Định nghĩa 1: Góc giữa hai đường thẳng a và b là góc nhọn hoặc vuông giữa hai đường thẳng a' và b' cùng đi qua một điểm và lần lượt song song với a và b. Ký hiệu là $(\widehat{a, b})$.

Định nghĩa 2: Hai đường thẳng được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90^0.

§3. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

1. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng



Định nghĩa 1: Một đường thẳng được gọi là vuông góc với mặt phẳng nếu nó vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó.

Định lý 1: Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng đó.

2. Các tính chất

Tính chất 1: Qua điểm O cho trước có duy nhất một mặt phẳng (P) vuông góc với một đường thẳng d cho trước.

Tính chất 2: Qua điểm O cho trước có duy nhất một đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (P) cho trước.

Chú ý: Mặt phẳng vuông góc với đoạn AB tại trung diểm được gọi là mặt phẳng trung trực của đoạn AB.

Tính chất 3:

a) Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với một trong hai đường thẳng thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

b) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì chúng song song nhau.

Tính chất 4:

a) Cho hai mặt phẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với một trong hai mặt phẳng thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.

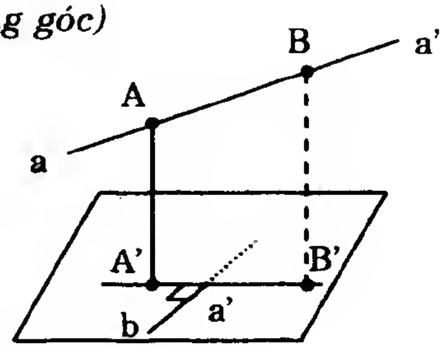
Tính chất 5:

a) Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (P). Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng (P) thì cũng vuông góc với đường thẳng d.

b) Nếu đường thẳng d và mặt phẳng (P) (không chứa d) cùng vuông góc với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.

Định lý 2: (Định lý ba đường vuông góc)

Cho đường thẳng a có hình chiếu trên mặt phẳng (P) là đường thẳng a'. Khi đó, một đường thẳng b nằm trong (P) vuông góc với a khi và chỉ khi nó vuông góc với a'



3. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Định nghĩa 2

- Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và (P) là 90^0.
- Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa đường thẳng a và hình chiếu a' của nó trên mặt phẳng (P) được gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P)

§4. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

1. Góc giữa hai mặt phẳng

Định nghĩa 1: Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa hai đường thẳng lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng đó.

Định lý 1: Cho đa giác $\mathcal{H}$ nằm trong mặt phẳng (α) có diện tích là S và $\mathcal{H}'$ là hình chiếu vuông góc của $\mathcal{H}$ trên mặt phẳng (α'). Khi đó, diện tích S' của $\mathcal{H}'$ được tính theo công thức

$\boxed{S' = S.\cos\varphi}$, với φ là góc giữa (α) và (α').

2. Hai mặt phẳng vuông góc

Định nghĩa 2: Hai mặt phẳng gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa hai mặt phẳng đó là góc vuông.

Định lý 2: Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng cùng góc với nhau là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

Hệ quả 1: Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.

Hệ quả 2: Cho hai mặt phẳng (α) và (β) vuông góc với nhau. Nếu từ một điểm thuộc (α) ta dựng một đường thẳng vuông góc với (β) thì đường thẳng này nằm trong (α).

Định lý 3: Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với một mặt phẳng thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng đó.

3. *Hình lăng trụ đứng, hình hộp chữ nhật, hình lập phương*

Định nghĩa 3:

- Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ có cạnh bên vuông góc với mặt đáy.
- Hình lăng trụ đều là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều.
- Hình hộp đứng là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành.
- Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật.
- Hình lập phương là hình hộp có tất cả các mặt bên là hình vuông.

4. *Hình chóp đều và hình chóp cụt đều*

Định nghĩa 4:

- Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và tất cả các cạnh bên đều bằng nhau.
- Cắt hình chóp đều bởi một mặt phẳng (P) song song với đáy. Phần của hình chóp đều nằm giữa đáy và mặt phẳng (P) gọi là hình chóp cụt đều.

§5. KHOẢNG CÁCH

1. *Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng.*

Định nghĩa 1: Khoảng cách từ một điểm M đến đường thẳng d (đến mặt phẳng (P)) là độ dài đoạn MH, với H là hình chiếu vuông góc của điểm M trên đường thẳng d (trên mặt phẳng (P)). Ký hiệu d(M, d) (d(M, (P))).

2. *Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song.*

Định nghĩa 2: Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (P). Khoảng cách giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) là khoảng cách từ một điểm bất kỳ trên d đến mặt phẳng (P). *Ký hiệu*: d(d, (P)).

Định nghĩa 3: Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau là khoảng từ một điểm bất kỳ trên (P) đến (Q). *Ký hiệu*: d((P), (Q)).

3. *Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau*

Định nghĩa 4:

a) Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a, b và cùng vuông góc với mỗi đường thẳng ấy được gọi là đường vuông góc chung của a và b.

b) Nếu đường vuông góc chung Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a, b lần lượt tại M, N thì độ dài đoạn thẳng MN gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b.

B/ BÀI TẬP CĂN BẢN

Bài 1. Cho hình bình hành ABCD. Gọi S là một điểm nằm ngoài (ABCD). Chứng minh rằng $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$.

Giải

Gọi $\{O\} = AC \cap BD$

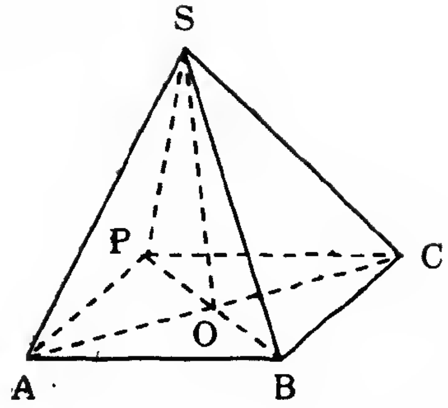
- Trong ΔSAC có O trung điểm AC. Nên $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO}$ (1)

- Trong ΔSBD có O trung điểm BD.

Nên $\quad \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}.$$



Bài 2. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BD của tứ diện ABCD. Gọi I là trung điểm của đoạn MN và P là điểm bất kỳ trong không gian. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$.

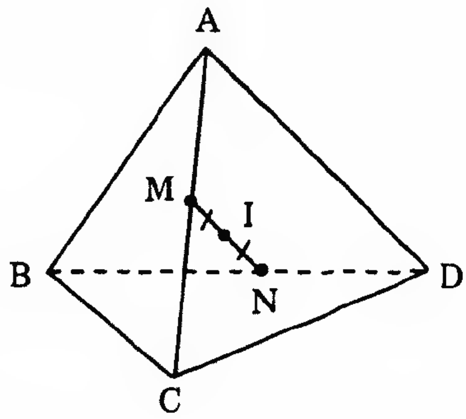
b) $\overrightarrow{PI} = \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}\right)$

Giải

a) Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IM} \\ \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IN} \end{cases}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}$$

$$= 2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID}) = \vec{0}$$



b) Ta có:

$$\begin{array}{rl} & \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IA} \\ + & \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{IB} \\ & \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{IC} \\ & \overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{ID} \\ \hline \end{array}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PI} + \underbrace{(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}}_{\vec{0}} = 4\overrightarrow{PI}$$

Bài 3. Cho tứ diện ABCD

a) Chứng minh: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0$

b) Từ đẳng thức trên suy ra rằng nếu tứ diện ABCD là $AB \perp CD$ và $AC \perp BC$.

Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC}$

$$= \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{AD}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{AC}(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{AB})$$

$$= \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DA} = 0$$

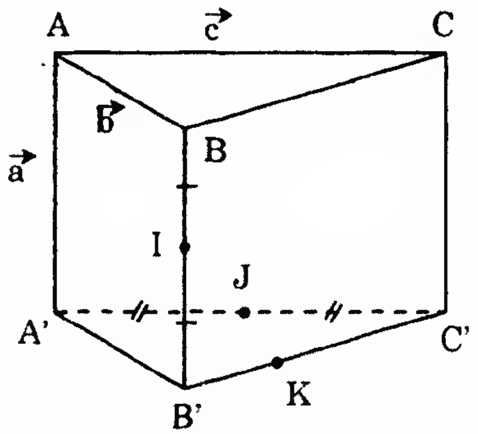
b) Nếu $AB \perp CD$ và $AC \perp DB$ thì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} = 0$

Do đó, từ đẳng thức suy ra $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow AD \perp BC$

Bài 4. Cho hình lăng trụ tam giác ABC.A'B'C', I, J lần lượt là trung điểm của BB' và A'C'. K là điểm thuộc cạnh B'C' sao cho $\overrightarrow{KC} = -2\overrightarrow{KB}$. Chứng minh rằng: A, I, J, K cùng thuộc một mặt phẳng.

Giải

- Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$
- Ta có:



$+\ \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'B'})$

$= \frac{1}{2}(2\vec{b} + \vec{a})$ (1)

$+\ \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC'})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CC'})$

$= \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{c})$ (2)

$+\ \overrightarrow{A'K} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'K}$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{B'C}$

$$= \overrightarrow{A'B} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{A'C'} - \overrightarrow{A'B'})$$

$$= \vec{b} + \frac{1}{3}(\vec{c} - \vec{b})$$

$$= \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{2}{3}\vec{b}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AK} = \vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c} + \frac{2}{3}\vec{b} = \frac{3\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}}{3} \qquad (3)$$

Từ (1) và (3) suy ra $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ})$

$\Rightarrow \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK}$ đồng phẳng

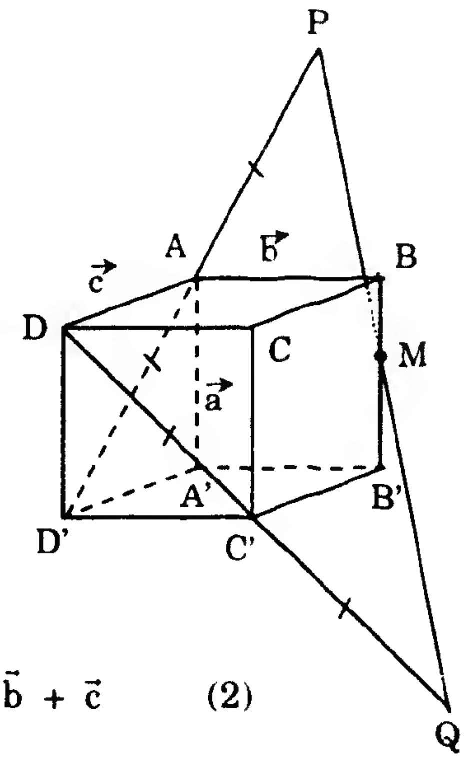
$\Rightarrow$ A, I, J, K đồng phẳng.

Bài 5. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D cạnh a. Gọi P và Q là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{B'A}$, $\overrightarrow{C'Q} = \overrightarrow{DC'}$.

a) Chứng minh rằng: PQ đi qua trung điểm của cạnh BB'

b) Tính PQ.

Giải



Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$

Suy ra: $\begin{cases} \vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{c} = \vec{c}.\vec{a} = 0 \\ \vec{a} = \vec{b}^2 = \vec{c}^2 = a^2 \end{cases}$

a) Gọi M là trung điểm BB', ta có:

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} - \vec{a} - \vec{c}$$

$$= -\left(\frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{C'Q}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c} + \vec{b} + \vec{a} = \frac{3}{2}\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ PQ và BB' cắt nhau tại trung điểm M của mỗi đường.

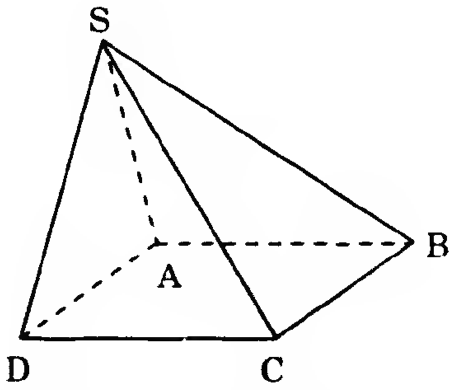
b) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ} = 3\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c}$

$\Rightarrow PQ^2 = (3\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c})^2 = 9a^2 + 4a^2 + 4c^2 = 17a^2$

Vậy $PQ = a\sqrt{17}$

Bài 6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông. Tất cả các cạnh bên và cạnh đáy của hình chóp đều bằng a. Chứng minh rằng $SA \perp SC$ và $SB \perp SD$.

Giải



Ta có: $\begin{cases} SA^2 + SC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \\ AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \end{cases}$

$\Rightarrow SA^2 + SC^2 = AC^2$

$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S

$\Rightarrow SA \perp SC$

Chứng minh tương tự $SB \perp SD$.

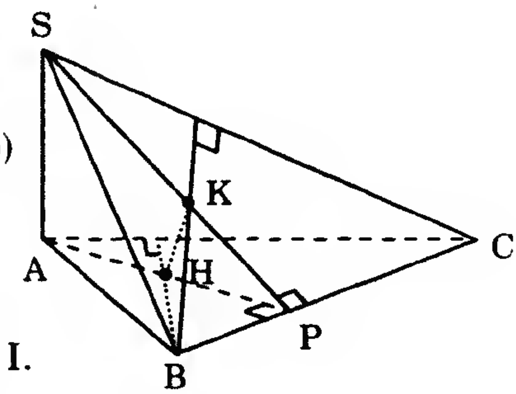
Bài 7. Cho tứ diện SABC có $SA \perp (ABC)$. Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC, SBC. Chứng minh rằng:

a) AH, SK, BC đồng qui

b) $SC \perp (BHK)$

c) $HK \perp (SBC)$

Giải



a) Gọi $\{I\} = AH \cap BC$

Khi đó: $\begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SA \text{ (Do } SA \perp (ABC)) \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAI)$

$\Rightarrow BC \perp SI$

$\Rightarrow$ AA, SK, BC đồng quay tại I.

b) Ta có: $\begin{cases} BH \perp AC \\ BH \perp SA \text{ (vì } SA \perp (ABC)) \end{cases}$

$\Rightarrow BH \perp (SAC)$

$$\left.\begin{array}{l} BH \perp SC \\ \text{Lại có: } DK \perp SC \end{array}\right\} \Rightarrow SC \perp (BHK)$$

c) Theo câu (b), ta có $SC \perp (BHK)$

$$\Rightarrow HK \perp SC$$

Hơn nữa, theo chứng minh ở câu (a): $BC \perp (SAI)$

$$\Rightarrow HK \perp BC \text{ nên } HK \perp (SBC).$$

Như vậy: $\begin{cases} HK \perp SC \\ HK \perp BC \end{cases}$ nên $HK \perp (SBC)$.

Bài 8. Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H trực tâm ΔABC. Chứng minh rằng:

a) $OA \perp BC$, $OB \perp CA$, $OC \perp AB$

b) $OH \perp (ABC)$

c) $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{OC^2}$

d) $\cos^2\widehat{HOA} + \cos^2\widehat{HOB} + \cos^2\widehat{HOC} = 1$

e) ΔABC có ba góc nhọn

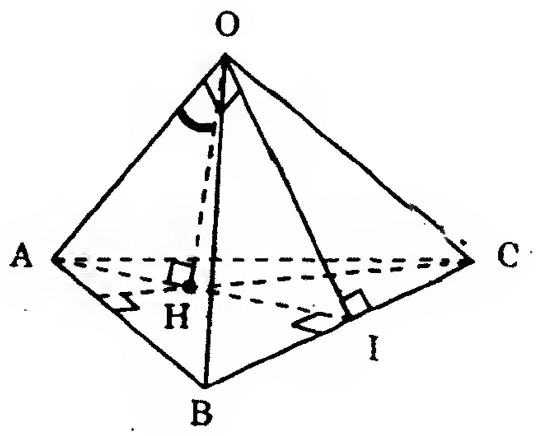
f) $OA^2.\text{tg}A = OB^2\text{tg}B = OC^2\text{tg}C$

(với $A = \widehat{BAC}$, $B = \widehat{ABC}$, $C = \widehat{ACB}$)

g) $S^2_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OCA}$

Giải

a) Ta có: $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases}$



$$\Rightarrow OA \perp (OBC)$$

$$\Rightarrow OA \perp BC$$

Chứng minh tương tự:

$$OB \perp CA, \; OC \perp AB$$

b) Theo câu a ta có:

$$\left.\begin{array}{l} BC \perp OA \\ \text{Lại có: } BC \perp HA \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (OAH)$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow OH \perp BC \\ \text{Chứng minh tương tự: } OH \perp CA\end{array}\right\} \Rightarrow OA \perp (ABC)$$

c) Gọi $\{I\} = AH \cap BC$

Suy ra: $\begin{cases} OA \perp OI \text{ (vì } OA \perp (OBC)) \\ BC \perp OI \text{ (vì } BC \perp (OAH)) \end{cases}$

• Xét tam giác vuông OAI, ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OI^2} \quad (1)$$

• Xét tam giác vuông OBC, ta có: $\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ (2)

Thế (2) vào (1) ta có: $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$

d) Theo câu (c), ta có:

$$\left(\frac{OH}{OA}\right)^2 + \left(\frac{OH}{OB}\right)^2 + \left(\frac{OH}{OC}\right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\widehat{HOA} + \cos^2\widehat{HOB} + \cos^2\widehat{HOC} = 1$$

e) Ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A$$

$$\Rightarrow OB^2 + OC^2 = OA^2 + OB^2 + OA^2 + OC^2 - 2AB.AC.\cos A$$

$$\Rightarrow \cos A = \frac{OA^2}{AB.AC} > 0$$

$\Rightarrow$ A nhọn

Chứng minh tương tự B, C nhọn.

Vậy: ΔABC có ba góc nhọn

f) Ta có: $\frac{tgB}{tgC} = \frac{\frac{AI}{BI}}{\frac{AI}{CI}} = \frac{CI}{BI} = \frac{CI.BC}{BI.BC} = \frac{OC^2}{OB^2}$

$\Leftrightarrow OB^2.tgB = OC^2.tgC$

Chứng minh tương tự: $OA^2.tgA = OB^2.tgB$

Vậy $OA^2.tgA = OB^2.tgB = OC^2tgC$

g) Theo chứng minh ở câu (c), ta có:

$$\cos A = \frac{OA^2}{AB.AC}$$

$$\Rightarrow 4S^2_{\Delta ABC} = AB^2.AC^2.\sin^2 A$$

$$= AB^2.AC^2 - AB^2.AC^2.\cos^2 A$$

$$= AB^2.AC^2 - OA^4$$

$$= (OA^2 + OB^2)(OA^2 + OC^2) - OA^4$$

$$= OA^2.OC^2 + OB^2.OA^2 + OB^2.OC^2$$

$$= 4S^2_{\Delta OCA} + S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OBC}$$

Vậy: $S^2_{\Delta ABC} = S^2_{\Delta OAB} + S^2_{\Delta OBC} + S^2_{\Delta OCA}$

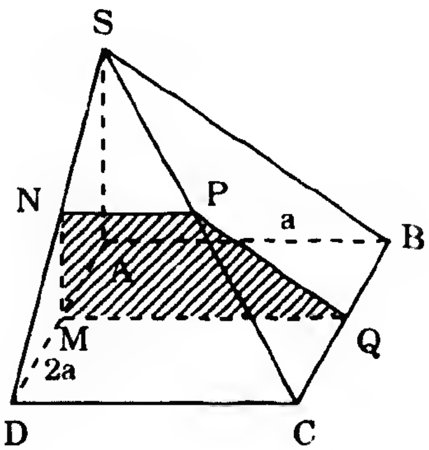
Bài 9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành với AB = a, AD = 2a, ΔSAB vuông cân tại A. M $\in$ cạnh AD. Mặt phẳng (α) đi qua M song song với (SAB) cắt SD, SC, BC lần lượt tại N, P, Q.

a) Chứng minh: MNPQ là hình thang vuông.

b) Đặt AM = x. Tính diện tích của MNPQ theo a và x.

Giải

a) $\begin{cases} (\alpha) \,//\, (SAB) \\ (\alpha) \cap (ABCD) = MP \\ (\alpha) \cap (SAB) = AB \end{cases}$



$\Rightarrow AB \,//\, MQ$ (1)

Chứng minh tương tự:

$SA \,//\, MN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $MN \perp MQ$ (vì $SA \perp AB$)

Mặt khác: $\begin{cases} DC \,//\, (\alpha) \text{ (vì } DC \,//\, AB \,//\, MQ \subset (\alpha)) & (3) \\ DC \subset (ABCD) \\ (ABCD) \cap (\alpha) = MQ \end{cases}$

$\Rightarrow DC \,//\, MQ$ (4)

Từ (1) và (4) $\Rightarrow$ AB // DC (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow$ MNPQ hình thang vuông

b) Ta có:

• MN // SA $\Rightarrow \dfrac{MN}{SA} = \dfrac{DM}{DA} = \dfrac{2a - x}{2a}$

$$\Rightarrow MN = \frac{2a - x}{2}$$

• MQ = a

• NP // DC $\Rightarrow \dfrac{NP}{DC} = \dfrac{SN}{SP} = \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{x}{2a}$

$$\Rightarrow NP = \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{1}{2}MN(NP + MQ)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2a - x}{2}\left(\frac{x}{2} + a\right) = \frac{4a^2 - x^2}{8}$$

Bài 10. Cho hình lập phương ABCD. A'B'C'D' cạnh a

a) Chứng minh rằng $B'D \perp (A'BC')$.

b) Tính d(A'BC'), (ACD'))

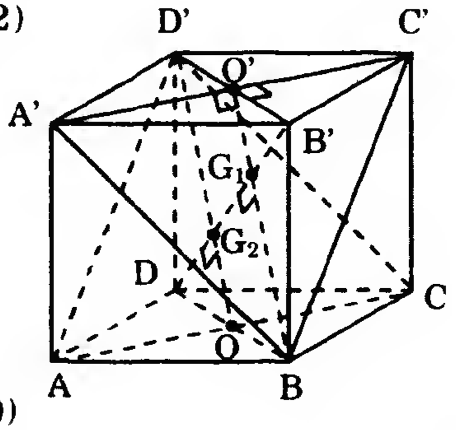
c) Tính d(BC',CD').

Giải

a) Gọi $\{O'\} = A'C' \cap B'D'$ (trong (A'B'C'C'))

$\{G_1\} = B'D \cap BO'$ (trong (BB'C'D))

Ta có: $\begin{cases} A'C' \perp B'D' \text{ (vì hai đường chéo hình vuông)} \\ A'C' \perp BO' \text{ (vì } BA' = BC' = a\sqrt{2}) \end{cases}$



$\Rightarrow A'C' \perp (BB'D') \Rightarrow B'D \perp A'C'$ (1)

Chứng minh tương tự: $B'D \perp BC'$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow B'D \perp (A'BC')$

Chứng minh tương tự $B'D \perp (ACD')$

b) Gọi $\{O\} = AC \cap BD$ (trong (ABCD))

$\{G_2\} = B'D \cap D'O$ (trong (BB'D'D))

Khi đó: d((A'BC'), (ACD')) = G_1G_2

$$= \frac{1}{3}B'D = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

c) Ta có: $\begin{cases} BC' \text{ và } CD' \text{ chéo nhau} \\ BC' \subset (A'BC') \\ CD' \subset (ACD') \end{cases}$

Do đó: d(BC', CD') = d((A'BC'), (ACD') = $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

Bài 11. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C có tất cả các cạnh đáy đều bằng a. Biết góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy là 60^0 và hình chiếu của đỉnh A lên (A'B'C') trùng với trung điểm H cúa cạnh B'C'.

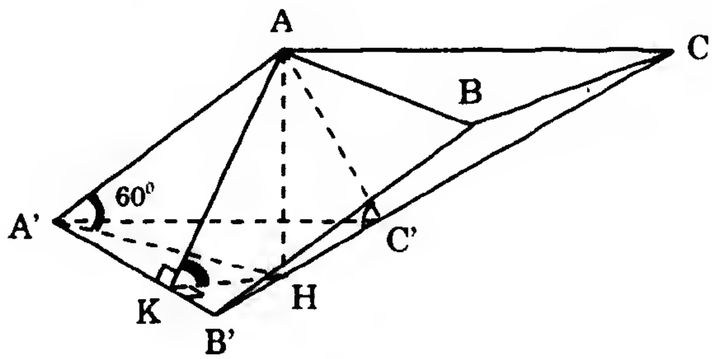
a) Tính khoảng cách hai đáy.

b) Tính tang của góc giữa hai đường thẳng BC và AC'

c) Tính cotg của góc giữa (AA'B'B) và (ABC).

Giải

a) Ta có:



AH ⊥ (A'B'C')

nên $\widehat{AA'H} = 60^0$

$\Rightarrow$ AH = A'H tg60^0

$$= \frac{a\sqrt{3}}{a}.\sqrt{3}$$

$$= \frac{3a}{2}$$

Vậy: d((ABC),(A'B'C')) = $\frac{3a}{2}$

b) Ta có: BC // B'B' nên ($\widehat{BC, AC'}$) = $\widehat{AC'B'}$

$$\Rightarrow tg(\widehat{BC, AC'}) = tg\,\widehat{AC'B'} = \frac{AH}{HC'} = \frac{\frac{3a}{2}}{\frac{a}{2}} = 3$$

c) Kẻ AK $\perp$ A'B' (K $\in$ A'B')
Hơn nữa AH $\perp$ (A'B'C') $\Big\}$ $\Rightarrow$ HK $\perp$ A'B'

(Do định lí ba đường vuông góc)

$$\Rightarrow \left(\widehat{(AA'B'B),(ABC)}\right) = \widehat{AKH}$$

$$\Rightarrow \text{cotg}\left(\widehat{(AA'B'B),(ABC)}\right) = \text{cotg}\,\widehat{AKH}$$

$$= \frac{HK}{AH} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{3a}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

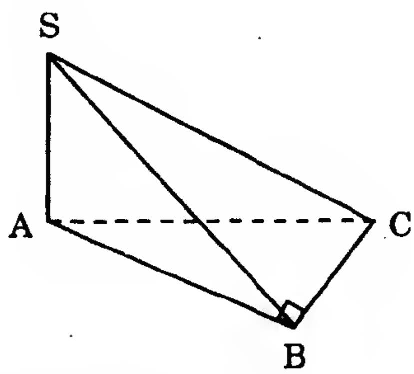
Bài 12. Cho tứ diện S.ABC có SA $\perp$ (ABC) và ΔABC vuông tại B. Chứng minh rằng:

a) (SAB) $\perp$ (ABC)

b) (SAC) $\perp$ (ABC)

c) (SBC) $\perp$ (SAB)

Giải



a) Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} SA \subset (SAB) \\ SA \perp (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$$

b) Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} SA \subset (SAB) \\ SA \perp (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow (SAC) \perp (ABC)$$

c) Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} BC \perp AB \text{ (vì } \Delta ABC \text{ vuông tại B)} \\ BC \perp SA \text{ (vì } SA \perp (ABC)) \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB)$$

Mà BC $\subset$ (SBC)

Nên (SBC) $\perp$ (SAB)

Bài 13. Cho hình chóp tứ giác đều SABCD có cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a.

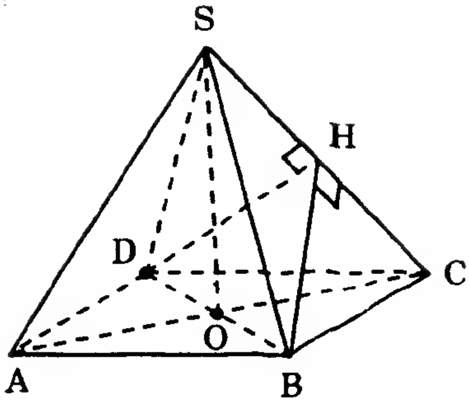
a) Tính độ dài đường cao của hình chóp.

b) Gọi H là trung điểm của SC. Chứng minh rằng (SAC) $\perp$ (MBD)

Giải

a) Gọi O là tâm hình vuông ABCD.

Do SABCD là hình chóp đều nên SO ⊥ (ABCD)



và $SO = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$

Vậy độ dài đường cao của hình chóp đều S.ABCD là $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

b) Ta có: $BS = BC = DS = DC = a$

$\Rightarrow SC \perp BM$ và $SC \perp DM$

$\Rightarrow SC \perp (MBD)$

Mà $SC \subset (SAC)$

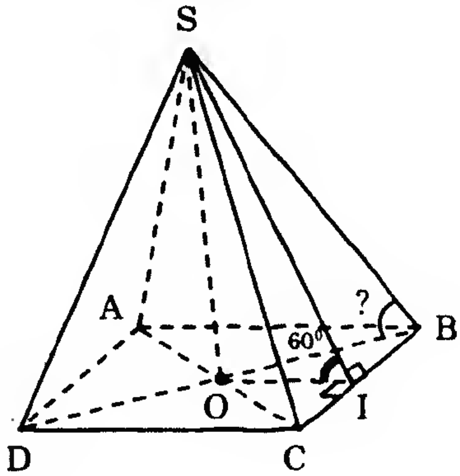
$\Rightarrow (SAC) \perp (MBD)$.

Bài 14. Cho hình chóp tứ giác đều SABCD. Biết AB = a và góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60^0. Tính tg của góc giữa cạnh bên và mặt đáy.

Giải

Gọi O và I lần lượt là trung điểm của AC và BC.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp OI \\ BC \perp SI \\ BC = (SBC) \cap (ABCD) \\ OP \subset (ABCD) \\ SI \subset (SBC) \end{cases}$



$\Rightarrow \left(\widehat{(SBC),(ABC)}\right) = \widehat{SID} = 60^0$

$\Rightarrow SO = OItg60^0 = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

$\Rightarrow tg(SB, (ABCD)) = tg\widehat{SBO} = \frac{SO}{OB} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Bài 15. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều cạnh a và $AA' = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Gọi O và O' lần lượt là trung điểm của AB và A'B'.

a) Chứng minh $AB \perp (COO')$

b) Tính d(AB, B'C)

Giải

a) Ta có: $\begin{cases} AB \perp OO' \text{ (vì } OO' \,//\, AA' \perp (ABC)) \\ AB \perp CO \text{ (vì } \Delta ABC \text{ đều)} \end{cases}$

$\Rightarrow AB \perp (COO')$

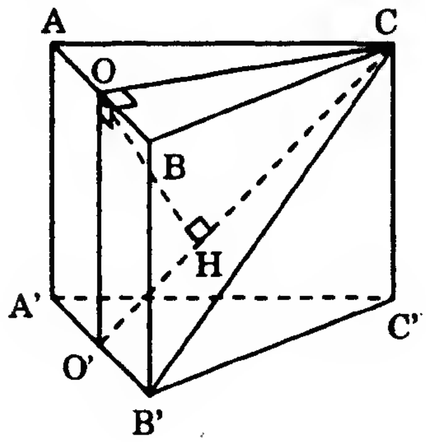
b) Ta có AB // (A'B'C) (vì AB // A'B' $\subset$ (A'B'C))

Nên d(AB, B'C) = d(AB, (A'B'C)) = d(O, (A'B'C)) (1)

Hơn nữa, kẻ OH $\perp$ có (H $\in$ CO')

Lại có: $OH \perp A'B' \left(\text{vì } \begin{cases} A'B' \,//\, AB \perp (COO') \\ OH \subset (COO') \end{cases} \right)$

$\Rightarrow OH \perp (A'B'C')$ (2)



Từ (1) và (2) d(AB, B'C) = OH

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{OO'^2} + \frac{1}{OC^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{a^2} + \frac{4}{3a^2}}} = \frac{\sqrt{30}}{10}a$$

Bài 16. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a, SA $\perp$ (ABCD) và SA = a. Dựng và tính đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng sau:

a) SB và AD

b) SC và BD

c) SB và CD

Giải

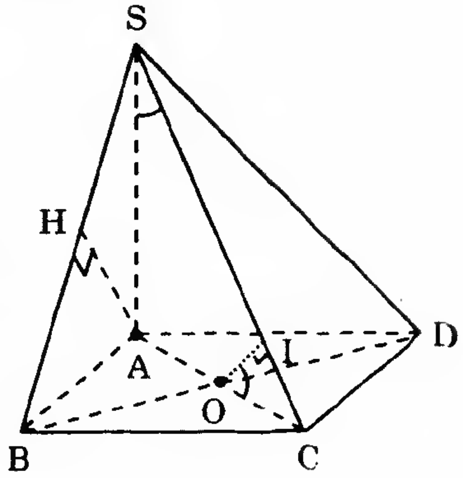
a) • Kẻ $AH \perp SB$ ($H \in SB$)

Ta lại có $\left.\begin{array}{l} AD \perp SA \\ AD \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow AD \perp (SAB)$

$\Rightarrow AD \perp AH$

$\Rightarrow$ AH là đoạn vuông góc chung của SB và AD

• $d(SB, AD) = AH = \dfrac{SB}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$



b) Kẻ $OI \perp SC$ ($I \in SC$)

Ta lại có:

$\left.\begin{array}{l} BD \perp AC \text{ (tính chất hình vuông)} \\ BD \perp SA \text{ (vì } SA \perp (ABCD)) \end{array}\right\}$

$\Rightarrow BD \perp (SAC)$

$\Rightarrow OI \perp BD$

$\Rightarrow$ OI là đoạn vuông góc chung của SC và BD.

• Ta có $\Delta IOC \backsim \Delta ASC$

$$\Rightarrow \frac{OI}{SA} = \frac{OC}{SC}$$

$$\Rightarrow OI = \frac{SA.OC}{SC} = \frac{a.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{3}a} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

Vậy $d(SC, BD) = OI = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$

c) • Ta có $BC \perp CD$ (tính chất hình vuông)

Hơn nữa:

$\left.\begin{array}{l} BC \perp AB \text{ (tính chất hình vuông)} \\ BC \perp SA \text{ (vì } SA \perp (ABCD)) \end{array}\right\}$

$\Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp SB$

$\Rightarrow$ BC là đoạn vuông góc chung của SB và CD

• $d(SB,CD) = BC = a$

Bài 17. Trong mặt phẳng (P) cho hình chữ nhật ABCD với AB = a, AD = b. Trên các nửa đường thẳng Ax, By vuông góc với (P) ở về cùng một phía đối với (P) ta lấy các điểm M và N với AM = x, AN = y.

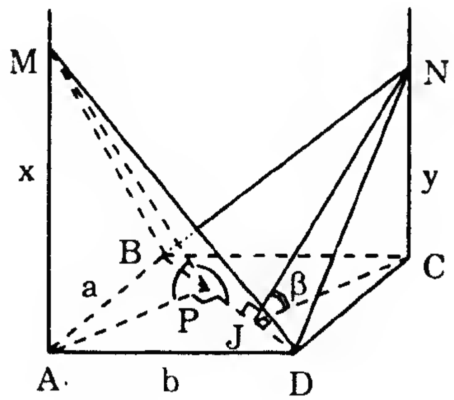
a) Tính tg của các góc β các mặt phẳng (MBD) và (NBD) tạo với mặt phẳng (P).

b) Chứng tỏ rằng để hai mặt phẳng (MBD) và (NBD) vuông góc với nhau thì điều kiện cần và đủ là $\dfrac{1}{xy} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$.

Giải

a) Đặt $\alpha = \left(\widehat{(MBD, P)}\right)$, $\beta = \left(\widehat{(NBD, P)}\right)$

Gọi I và J lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và C trên BD.



Ta có: $\alpha = \widehat{AIM}$, $\beta = \widehat{CJN}$

Khi đó:

$$tg\alpha = \frac{AM}{AI} = x\sqrt{\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2}}$$

$$= \frac{x\sqrt{a^2 + b^2}}{a.b}$$

$$tg\beta = \frac{CN}{CJ} = y\sqrt{\frac{1}{CD^2} + \frac{1}{CB^2}} = \frac{y\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}$$

b) Ta có: $(MBD) \perp (NBD) \Leftrightarrow \alpha + \beta = 90^0$

$$\Leftrightarrow tg\alpha = cotg\beta$$

$$\Leftrightarrow tg\alpha - tg\beta = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{xy(a^2 + b^2)}{(ab)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{xy}$$

Bài 18. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy là tam giác cân đỉnh A, $\widehat{ABC} = \alpha$, BC' hợp với (ABC) một góc β, I trung điểm AA' và $\widehat{BIC} = 90^0$. Chứng minh rằng:

a) ΔBIC vuông cân

b) $tg^2\alpha + tg^2\beta = 1$

(Đại học Quốc gia Hà nội, năm 2000)

Giải

a) Gọi M là trung điểm BC

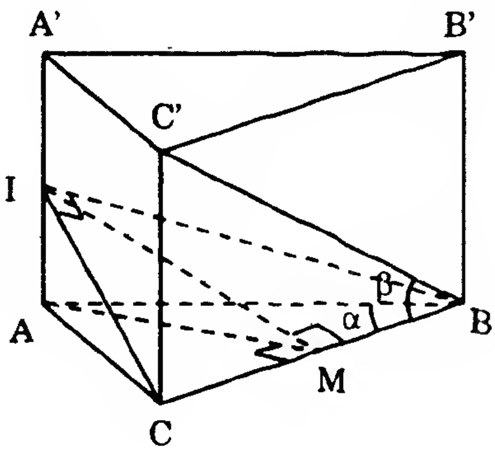
Ta có: $\left.\begin{matrix} AH \perp BC \\ AA' \perp (ABC) \end{matrix}\right\}$

$IM \perp BC$

(Do định lí ba đường vuông góc)

$\Rightarrow \Delta$ BIC vuông cân tại I.

(Vì có đường cao IM là trung tuyến)



b) Đặt BC = y > 0

Ta có: $\begin{cases} AA' = ytg\beta \\ AB = AC = \dfrac{y}{2\cos\alpha} \end{cases}$

Theo định lí Pythagore trong ΔIAB, ta có:

$$IB^2 = AB^2 + IA^2 = \left(\frac{y}{2\cos\alpha}\right)^2 + \left(\frac{ytg\beta}{2}\right)^2$$

$$= \frac{y^2}{4}(tg^2\beta + \frac{1}{\cos^2\alpha})$$

$$= \frac{y^2}{4}(tg^2\alpha + tg^2\beta + 1)$$

Mặt khác, ΔBDC vuông cân tại I nên:

$$BC^2 = 2IB^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 2.\frac{y^2}{4}(tg^2\alpha + tg^2\beta + 1)$$

$$\Leftrightarrow tg^2\alpha + tg^2\beta = 1$$

Bài 19. Cho hình hộp chữ nhật. Gọi α, β, γ là góc tạo bởi một đường chéo của hình hộp với ba cạnh cùng xuất phát từ một đỉnh. Chứng minh rằng:

a) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 1$

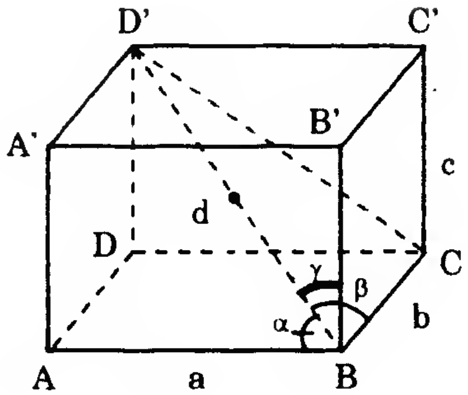
b) $\sqrt{2008\cos^2\alpha + 1} + \sqrt{2008\cos^2\beta + 1} + \sqrt{2008\cos^2\gamma + 1} \le \sqrt{6033}$

Giải

a) Xét đường chéo BD của hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'.

Đặt $\begin{cases} BA = a, BC = b, BB' = c, BD' = d \\ \widehat{ABD'} = \alpha, \widehat{CBD'} = \beta, \widehat{B'BD'} = \gamma \end{cases}$

Ta có: $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{a}{d} \\ \cos\beta = -\dfrac{b}{d} \\ \cos\gamma = \dfrac{c}{a} \end{cases}$



Hơn nữa $d^2 = BD'^2 = BC^2 + CD'^2$

$= BC^2 + CC'^2 + C'D'^2$

$= b^2 + c^2 + a^2$

Do đó: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{d^2} = 1$

b) Theo bất đẳng thức Bunhiacopski:

$$\sqrt{2008\cos^2\alpha + 1} + \sqrt{2008\cos^2\beta + 1} + \sqrt{2008\cos^2\gamma + 1}$$

$$\leq \sqrt{3}\,.\sqrt{2008(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) + 3} = \sqrt{6033}$$

Bài 20. Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn (C) đường kính AB cố định và điểm M di động trên (C). Gọi S là điểm cố định trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A. Hạ AE ⊥ SB tại E và AN ⊥ SM tại N.

a) Chứng minh rằng: AN ⊥ SN

b) Chứng minh rằng khi M di động trên (C) thì N luôn thuộc một đường tròn cố định.

Giải

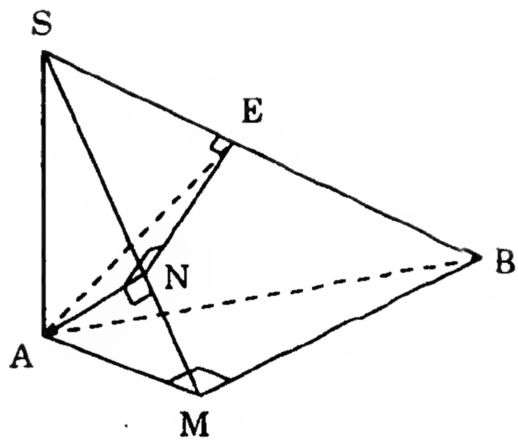
a) Ta có: $\begin{cases} MB \perp AM \text{ (gt)} \\ MB \perp SA \text{ (vì } SA \perp (ABM)) \end{cases}$

$\Rightarrow MB \perp (SAM)$

$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow AN \perp MB \\ &\text{Mà } AN \perp SM \end{aligned}\right\}$

$\Rightarrow AN \perp (SBM)$

$\Rightarrow AN \perp BN$



b) Theo chứng minh trên, ta có:

$AN \perp (SBM)$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow SB \perp AN \\ \text{Lại có } SB \perp AE\end{array}\right\}$

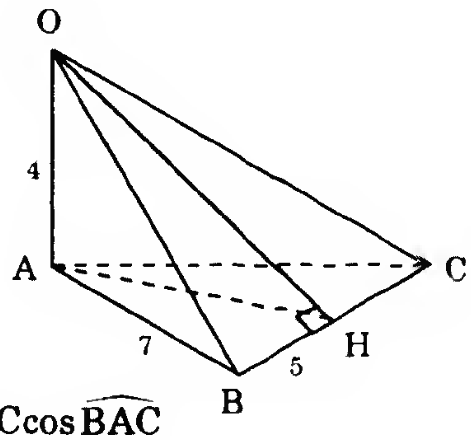
$\Rightarrow SB \perp (ANE)$

$\Rightarrow$ (ANE) là mặt phẳng cố định

$\Rightarrow$ N thuộc đường tròn (cố định) đường kính AE nằm trong mặt phẳng qua A và vuông góc với SB.

Bài 21. Cho hình chóp O.ABC có $OA \perp (ABC)$ và OA = 4, OB = 7, BC = 5, CA = 8. Tính d(O, BC).

Giải



Kẻ $AH \perp BC$ tại H

Do $OA \perp (ABC)$.

Nên $OH \perp BC$

(Định lý ba đường vuông góc)

Suy ra d(O, BC) = OH.

Hơn nữa: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC\cos\widehat{BAC}$

$\Leftrightarrow 25 = 49 + 64 - 112\cos\widehat{BAC}$

$\Leftrightarrow \cos\widehat{BAC} = \dfrac{11}{14}$

$\Rightarrow \sin\widehat{BAC} = \sqrt{1-\cos^2\widehat{BAC}} = \sqrt{1-\left(\dfrac{11}{14}\right)^2} = \dfrac{5\sqrt{3}}{14}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{7.8.5\sqrt{3}}{14} = 10\sqrt{3}$

$\Rightarrow AH = \dfrac{2S_{\Delta ABC}}{BC} = \dfrac{20\sqrt{3}}{5} = 4\sqrt{3}$

$\Rightarrow OH^2 = OA^2 + AH^2 = 16 + 16.3 = 64$

$\Rightarrow OH = 8$

Vậy: d(O, BC) = 8.

C/ BÀI TẬP NÂNG CAO

Bài 1. Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau sao cho AC = 2OB và BC = 2OA. M và N là chân các đường vuông gó kẻ từ O lần lượt xuống AC và BC.

a) Chứng minh: $MN \perp OC$

b) Tính $\cos\widehat{MON}$

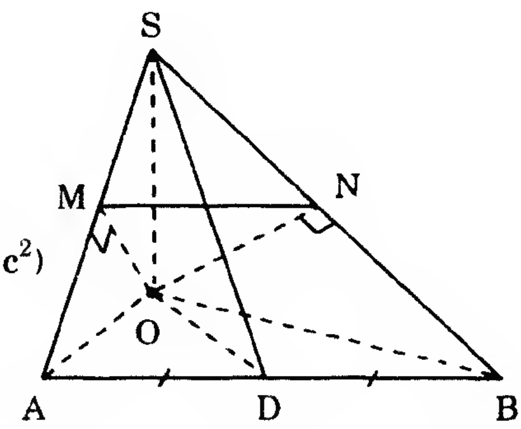
c) Cho D là trung điểm của AB. Chứng minh rằng:

$$\frac{tg^4\widehat{OCD}}{tg\widehat{OCA}} + \frac{MN}{AB} = 1$$

Giải

Đặt OA = a, OB = b, OC = c

Ta có: $\begin{cases} AC = 2OB = 2b \\ BC = 2OA = 2a \end{cases}$



$\Rightarrow \begin{cases} 4b^2 = a^2 + c^2 \\ 4a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$

$\Rightarrow 4b^2 - 4a^2 = (a^2 + c^2) - (b^2 + c^2)$

$\Leftrightarrow b^2 = a^2$

$\Leftrightarrow a = b$

$\Rightarrow c = a\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} AC = BC = 2a \\ AB = a\sqrt{2} \end{cases}$

a) Ta có: $\Delta OAC = \Delta OBC$

$\Rightarrow \begin{cases} OM = ON \\ CA = CB \end{cases}$

• $\Delta OCM = \Delta OCN \Rightarrow CM = CN$

$\Rightarrow \dfrac{CM}{CA} = \dfrac{CN}{CB}$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow MN \,//\, AB \\ \text{Mà } OC \perp (OAB) \Rightarrow OC \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow OC \perp MN$

b) • Xét ΔOCA, ta có: $\dfrac{1}{OM^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OC^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{3a^2} = \dfrac{4}{3a^2}$

$\Rightarrow OM = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

• Do MN // AB $\Rightarrow \dfrac{MN}{AB} = \dfrac{CM}{CA} = \dfrac{CM.CA}{CA} = \dfrac{OC^2}{CA^2} = \dfrac{3a^2}{4a^2} = \dfrac{3}{4}$

$$\Rightarrow MN = \frac{3}{4}AB = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \cos\widehat{MON} = \frac{PN^2 + ON^2 - MN^2}{2OMON}$$

$$= \frac{2OM^2 - MN^2}{2OM^2} = \frac{2.\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{3a\sqrt{2}}{4}\right)^2}{a\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}$$

Vậy $\cos\widehat{MON} = \dfrac{1}{4}$

c) Ta có:

$$\begin{cases} tg\widehat{OCA} = \dfrac{OA}{OC} = \dfrac{a}{a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ tg\widehat{OCD} = \dfrac{OD}{OC} = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{tg^4\widehat{OCD}}{tg^4\widehat{OCA}} + \frac{MN}{AB} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{9}} + \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$$

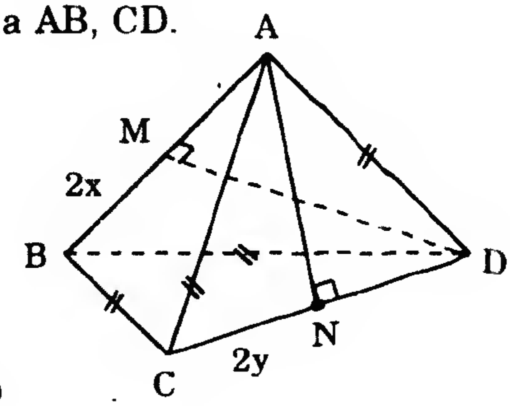
Bài 2. Cho tứ diện ABCD có AB = 2x > 0, CD = 2y > 0 và bốn cạnh còn lại đều bằng 1.

a) Tính $\Sigma = S_{\Delta BCD} + S_{\Delta ACD} + S_{\Delta ADB} + S_{\Delta BCD}$ theo x, y.

b) Xác định x, y để Σ đạt giá trị lớn nhất.

Giải

a) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.



Ta có:

• $CM = DM = \sqrt{1 - x^2}$

$\Rightarrow S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ADB} = x\sqrt{1 - x^2}$

• $AN = BN = \sqrt{1 - y^2}$

$\Rightarrow S_{\Delta ACD} = S_{\Delta BCD} = y\sqrt{1 - y^2}$

Vì vậy: $\Sigma = 2(x\sqrt{1 - x^2} + y\sqrt{1 - y^2})$

b) Theo bất đẳng thức Cauchy

$$\sum \le (x^2 + 1 - x^2) + (y^2 + 1 - y^2) = 2$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{1 - x^2} \\ y = \sqrt{1 - y^2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Vậy: Max $\sum = 2 \Leftrightarrow x = y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Bài 3. Cho ΔOAB. Trên đường thẳng (Δ) vuông góc với (OAB) tại O, ta lấy điểm C ($\neq$ O) Gọi H là trực tâm ΔABC, qua H dựng đường thẳng vuông góc với (ABC) cắt (OAB) tại K. Chứng minh rằng:

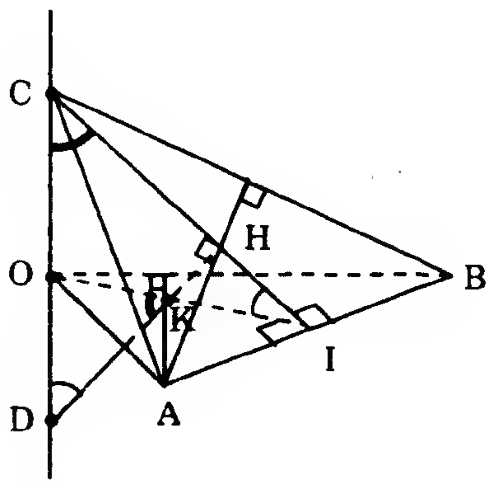
a) Trực tâm ΔOAB.

b) HK cắt (Δ) tại D.

c) $AD \perp BC$ và $AC \perp BD$.

d) Tích số OC.OD không phụ thuộc vào vị tự của C trên (Δ).

Giải



a) Ta có: $HK \perp (ABC)$

$\Rightarrow CB \perp HK$ (1)

Do H trực tâm ΔABC

$\Rightarrow CB \perp AH$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow CB \perp (AHK)$

$\Rightarrow CB \perp AK$ (3)

Do $(\Delta) \perp (OAB)$

$\Rightarrow (A) \perp AK$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow AK \perp (OBC)$

$\Rightarrow AK \perp OB$ (5)

Chứng minh tương tự $BK \perp OA$ (6)

Từ (5) và (6) $\Rightarrow$ K là trực tâm ΔOAB

b) Gọi $\{I\} = CH \cap AB$

Do vậy O, K, I thẳng hàng

Khi đó HK và (Δ) nằm trong (IOC) không song song nên cắt nhau tại D.

c) Theo chứng minh trên $CB \perp (AHK)$

$\Rightarrow BC \perp AD$

Chứng minh tương tự: $AC \perp BD$

d) Ta có $\Delta OKD \backsim \Delta OCI$

$$\Rightarrow \frac{OK}{OC} = \frac{OD}{OP}$$

$$\Rightarrow OC.OD = OK.OI = const$$

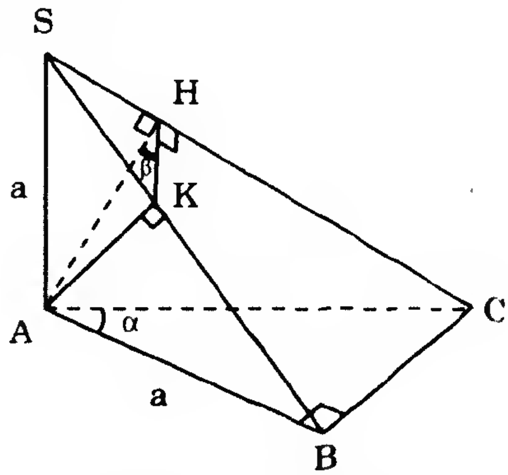
Bài 4. Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $SA = AB = a$, $\widehat{BAC} = \alpha$, (ABC). Gọi β là góc giữa (SAC) và (SBC).

a) Chứng minh rằng: $tg\alpha.tg\beta = \dfrac{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$.

b) Tam giác ABC phải có điều kiện gì để $\beta = 60^0$.

Giải

a) Kẻ $AH \perp SC$, $AK \perp SB$ ($H \in SE$, $K \in SB$)



Ta có: $\begin{cases} BC \perp BA \\ BC \perp SA \text{ (vì } SA \perp (ABC)) \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow AK \perp BC \\ \text{Lại có } AK \perp SB \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} AK \perp (SBC) \\ \text{Mà } AH \perp SC \end{array}\right\} \Rightarrow HK \perp SC$

(Do định lí ba đường vuông góc)

$\Rightarrow \widehat{AHK} = \beta$

$$\Rightarrow \sin\beta = \sin\widehat{AHK} = \frac{AK}{AH} = \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{\cos^2\alpha}{a^2}} = \sqrt{\frac{1+\cos^2\alpha}{2}}$$

$$\Rightarrow \cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta = 1 - \frac{1+\cos^2\alpha}{2} = \frac{\sin^2\alpha}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\beta = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow tg\beta = \frac{\sqrt{\dfrac{1+\cos^2\alpha}{2}}}{\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}{\sin\alpha} \Rightarrow tg\alpha.tg\beta = \frac{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$$

b) Ta có: $\beta = 60^0 \Leftrightarrow \quad tg\beta = \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{1+\cos^2\alpha}}{\sin\alpha} = \sqrt{3}$$

$\Leftrightarrow \quad 1 + \text{cotg}^2\alpha = 3$

$\Leftrightarrow \quad \text{cotg}^2\alpha = 1$

$\Leftrightarrow \quad \text{cotg}\alpha = 1$

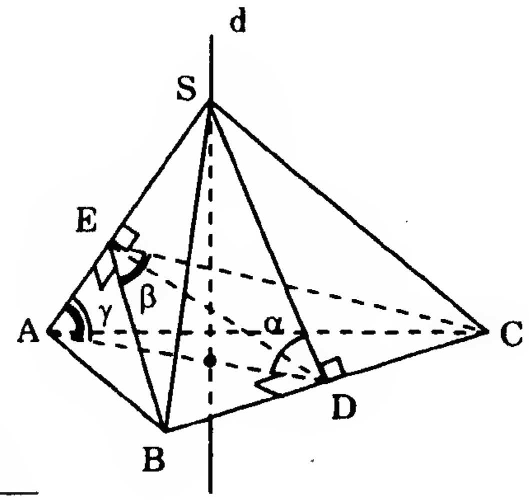
$\Leftrightarrow \quad \alpha = 45^0$

$\Leftrightarrow \quad \Delta ABC$ vuông cân tại B.

Bài 5. Cho là tâm tam giác đều ABC và d là đường thẳng vuông góc với (ABC) tại O với S (khác 0) trên d. Gọi α là giữa mặt bên và mặt đáy, β là góc giữa hai mặt bên kề nhau. Chứng minh rằng đại lượng $F(\alpha,\beta) = \text{tg}^2\alpha\ (3\text{tg}^2\frac{\beta}{2} - 1)$ không phụ thuộc vào vị tự của S trên d.

(Tạp chí "Toán học của tuổi trẻ", năm 2005)

Giải



Gọi D là trung điểm cạnh BC

E là hình chiếu của D trên SA

Dễ thấy rằng $\widehat{SDA} = \alpha, \widehat{BEC} = \beta$

Đặt $\widehat{SAD} = \gamma$

Ta có:

$$\text{tg}\alpha = \frac{SO}{OD} = 2.\frac{SO}{OA} = 2\text{tg}\gamma$$

$$\text{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{DC}{DE} = \frac{BC}{2DE} = \frac{BC}{2AD\sin\gamma}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}\sin\gamma}$$

$$(\text{vì } AD = \frac{BC\sqrt{3}}{2})$$

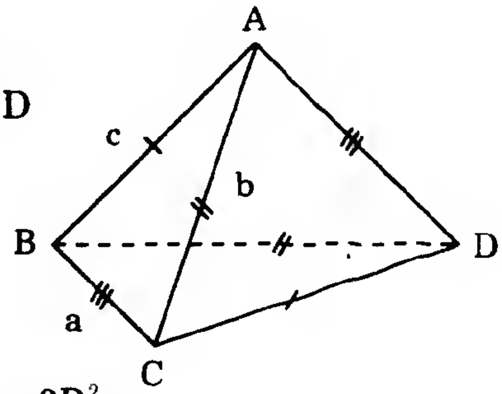
$$\Rightarrow F(\alpha, \beta) = (2\text{tg}\gamma)^2\left(3.\frac{1}{3\sin^2\gamma} - 1\right)$$

$$= 4\text{tg}^2\gamma\left(\frac{1}{\sin^2\gamma} - 1\right) = 4\text{tg}^2\gamma.\text{cotg}^2\gamma$$

$$= 4 = \text{hằng số} \Rightarrow (\text{đpcm})$$

Bài 6. Cho tứ diện ABCD với AB = CD = c, AC = BD = b, AD = BC = a. Chứng minh rằng: $\frac{1}{a^2b^2} + \frac{1}{b^2c^2} + \frac{1}{c^2a^2} \le \frac{9}{S^2}$ (*), trong đó S là tổng diện tích bốn mặt của tứ diện.

Giải



Hiển nhiên ta có:

$\Delta ABC = \Delta ACB = \Delta ABD = \Delta BCD$

$\Rightarrow S = 4S_{\Delta ABC} = \frac{abc}{R}$

trong đó R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Khi đó:

BĐT (*) $\Leftrightarrow \frac{1}{(ab)^2} + \frac{1}{(bc)^2} + \frac{1}{(ca)^2} \le \frac{9R^2}{(abc)^2}$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \le 9R^2$ (**)

BĐT thức cuối luôn đúng, vì

$$a^2 + b^2 + c^2 = 4R^2(\sin^2A + \sin^2B + \sin^2C)$$

$$= 4R^2[1 - \cos^2A + 1 - \frac{1}{2}(\cos2B + \cos2C)]$$

$$= 4R^2[2 - \cos^2A + \cos A.\cos(B - C)]$$

$$\le 4R^2(2 - \cos^2A + |\cos A|)$$

$$= 4R^2[\frac{9}{4} - (\cos^2A - |\cos A| + \frac{1}{4})]$$

$$= 4R^2[\frac{9}{4} - (|\cos A| - \frac{1}{2})^2] \le 9R^2$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos A.\cos(B - C) = |\cos A| \\ |\cos A| = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} B = C \\ A = 60^0 \end{cases} \Leftrightarrow \Delta ABC$ đều

$\Leftrightarrow$ ABCD là tứ diện đều.

Bài 7. Cho tứ diện đều cạnh bằng 1. M và N là các điểm di động trên AB, AC sao cho (DMN) luôn vuông góc với (ABC). Đặt AM = x, AN = y.

a) Chứng minh rằng: x + y = 2xy

b) Tính tổng diện tích bốn mặt của tứ diện DAMN.

c) Xác định x, y để đại lượng ở câu b đạt giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

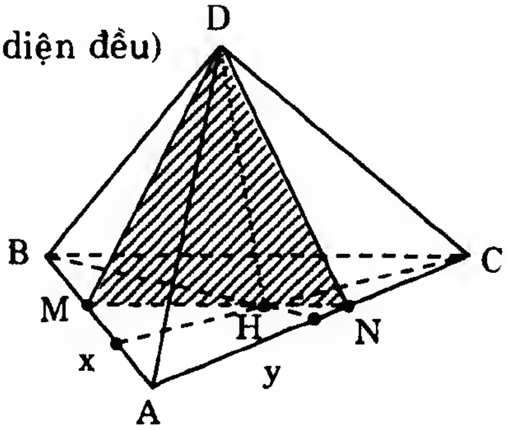
Giải

a) Kẻ $DH \perp MN$ tại H.

Do $\begin{cases}(DMN) \perp (ABC) \\ (DMN) \cap (ABC) = MN\end{cases}$

Nên $DH \perp (ABC)$

$\Rightarrow$ H là tâm ΔABC (vì ABCD là tứ diện đều)



Khi đó:

$$S_{\Delta AMN} = S_{\Delta AHM} + S_{\Delta AHN}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}xy\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}AH(x + y).\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}(x + y).\frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{12}(x + y)$$

$$\Leftrightarrow x + y = 2xy$$

b) $\Sigma = S_{\Delta AMN} + A_{\Delta DAM} + S_{\Delta DAN} + S_{\Delta DMN}$

$$= \frac{1}{2}xy\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}x\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}y.\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2 - xy}.\frac{\sqrt{6}}{3}$$

(vì $DH^2 = DA^2 = AH^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{2}{3}$)

Vậy $\Sigma = \frac{\sqrt{3}}{4}(x + y + xy) + \frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{x^2 + y^2 - xy}$

c) Do kết quả câu a) $x + y = 3xy$

Nên: $\Sigma = \sqrt{3}xy + \frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{3xy(3xy - 1)}$ (1)

- Chú ý là $\frac{1}{2} \le x, y \le 1$ nên

$$(x - 1)(y - 1) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow xy - (x + y) + 1 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow xy - 3xy + 1 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow xy \le \frac{1}{2} \quad (2)$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ (x, y) $\Leftrightarrow \{(1, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 1)\}$

• Theo bất đẳng thức Cauchy:

$$3xy = x + y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$\Rightarrow 9(xy)^2 \geq 4xy$$

$$\Leftrightarrow xy \geq \frac{4}{9} \qquad (3)$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow x = y = \frac{2}{3}$

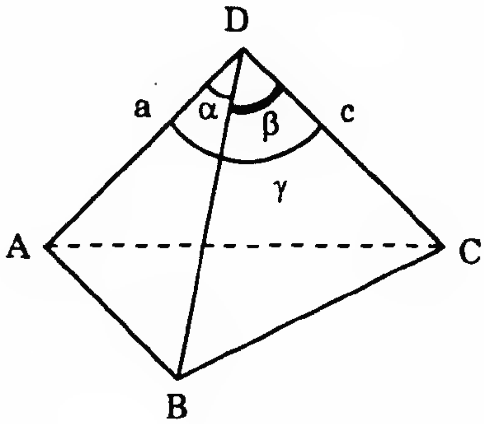
Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \frac{4\sqrt{3}}{9} + \frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{\frac{12}{9}\cdot\frac{3}{9}} \leq \sum \leq \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{6}\sqrt{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}}$

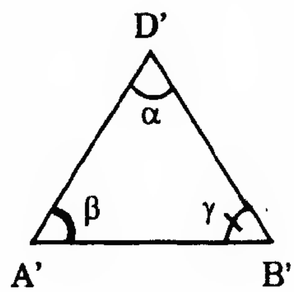
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{9}(4 + \sqrt{2}) \leq \sum \leq \frac{1}{4}(\sqrt{2} + 2\sqrt{3})$$

Vậy: $\begin{cases} \text{Max}\sum = \frac{1}{4}(\sqrt{2} + 2\sqrt{3}) \text{ khi } (x, y) \in \{(1, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, 1)\} \\ \text{Min}\sum = \frac{\sqrt{3}}{9}(4 + \sqrt{2}) \text{ khi } x = y = \frac{3}{3}. \end{cases}$

Bài 8. Cho tứ diện ABCD có $S_{\Delta DAB} = S_{\Delta DBC} = S_{\Delta DCA}$ và tổng các góc phẳng ở đỉnh của tứ diện bằng 180^0. Chứng minh rằng ABCD là tứ diện gần đều (tức là có DA = BC, DB = AC, DC = AB)

Giải





Đặt DA = a, DB = b, DC = c

$\widehat{ADB} = \alpha$, $\widehat{BDC} = \beta$, $\widehat{CDA} = \gamma$

Theo giả thiết, ta có:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 180^0 \\ S_{\Delta DAB} = S_{\Delta DBC} = S_{\Delta DCA} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}ab\sin\alpha = \frac{1}{2}bc\sin\beta = \frac{1}{2}ca\sin\gamma$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{c} = \frac{\sin\beta}{a} = \frac{\sin\gamma}{b} \qquad (1)$$

Xét $\Delta D'A'B'$ có $A'B' = c$, $\widehat{D'} = \alpha$, $\widehat{A'} = \beta$, $\widehat{B'} = \gamma$

Theo định lý hàm sin trong $\Delta D'A'B'$, ta có:

$$\frac{\sin\alpha}{c} = \frac{\sin\beta}{B'D'} = \frac{\sin\gamma}{A'D'} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow B'D' = a$, $A'D' = b$

$\Rightarrow \Delta D'A'B' = \Delta DAB$

$\Rightarrow AB = A'B' = c$

$\Rightarrow AB = DC$

Chứng minh tương tự

$BC = AD$, $CA = DB$

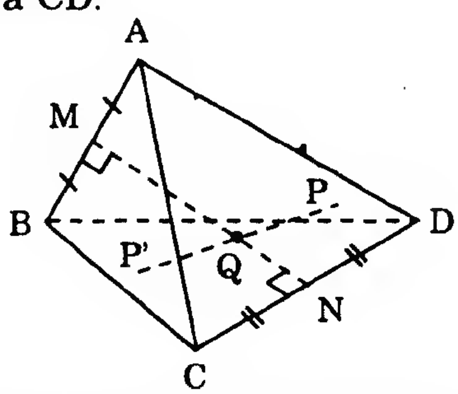
Bài 9. Cho tứ diện ABCD có $AD = BC = a$, $AC = BD = b$, $AB.CD = c^2$. P tùy ý trong không gian. Chứng minh rằng:

$$PA + PB + PC + PD \geq \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$$

(Tạp chí "Toán học ở tuổi trẻ")

Giải

Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD.



Khi đó: $\begin{cases} \Delta ABC = \Delta ABD \\ \Delta ACD = \Delta BCD \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} CM = DM \\ AN = BN \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} MN \perp CD \\ MN \perp AB \end{cases}$

Gọi P' là điểm đối xứng của P qua MN và Q là giao điểm của MN và PP'.

Đặt $\begin{cases} AB = m, CD = n\ (\Rightarrow mn = c^2) \\ MQ = x,\ NQ = y \end{cases}$

Ta có: $AP' = BP$ và $CP' = DP$

$$\Rightarrow PA + PB + PC = (PA + AP') + (P'C + PC) \geq 2(AQ + CQ)\ (1)$$

Mặt khác

$$AQ + CQ = \sqrt{x^2 + \frac{m^2}{4}} + \sqrt{y^2 + \frac{n^2}{4}}$$

$$\geq \sqrt{(x+y)^2 + \frac{1}{4}(m+n)^2} \text{ (Do bất đẳng thức Bunhiacopski)}$$

$$\geq \sqrt{MN^2 + \frac{1}{4}(m+n)^2}$$

$$= \sqrt{CM^2 - \frac{n^2}{4} + \frac{1}{4}(m+n)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}[2(a^2+b^2)] - m^2 - \frac{n^2}{4} + \frac{1}{4}(m+n)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + m.n)} \text{ (Do công thức trung tuyến trong tam giác)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow PA + PB + PC + PD \geq \sqrt{2(a^2 + b^2 + c^2)}$

Bài 10.

a) Cho ΔABC. Chứng minh rằng:

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 \geq 4S_{\Delta ABC}\sqrt{3}$$

b) Cho tứ diện S_{ABC} có tổng các góc phẳng ở đỉnh S của tứ diện bằng 180^0 và $SA = SB = SC = 1$. Chứng minh:

$$\Sigma = S_{\Delta SAB} + S_{\Delta SBC} + S_{\Delta SCA} + S_{\Delta ABC} < \frac{7\sqrt{3}}{6}$$

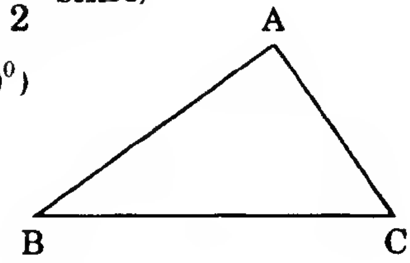
Giải

a) Ta có:

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 - 4S_{\Delta ABC}\sqrt{3}$$

$= AB^2 + CA^2 + AB^2 + CA^2 - 2AB.CA.\cos A - 2\sqrt{3}\,AB.CA.\sin A$

$= 2(AB^2 + CA^2) - 4AB.CA(\frac{1}{2}\cos A + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin A)$



$= 2(AB^2 + CA^2) - 4AB.CA.\cos(A - 60^0)$

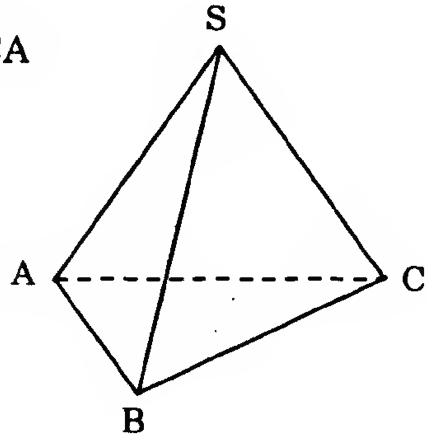
$\geq 2(AB^2 + CA^2) - 4AB.CA$

$\geq 2(AB - CA)^2 \geq 0$

$\Rightarrow AB^2 + BC^2 + CA^2 \geq 4S_{\Delta ABC}\sqrt{3}$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(A - 60^0) = 1 \\ AB = CA \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 60^0 \\ AB = CA \end{cases}$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ đều



b) Theo kết quả câu a), ta có:

$$\begin{array}{rl} & SA^2 + SB^2 + AB^2 \geq 4\sqrt{3}\,S_{\Delta SBC} \\ & SB^2 + SC^2 + BC^2 \geq 4\sqrt{3}\,S_{\Delta SBC} \\ + & SC^2 + SA^2 + CA^2 \geq 4\sqrt{3}\,S_{\Delta SCA} \\ & AB^2 + BC^2 + CA^2 \geq 4\sqrt{3}\,S_{\Delta ABC} \\ \hline & SA^2 + SB^2 + SC^2 + AB^2 + BC^2 + CA^2 \geq 2\sqrt{3}\,\Sigma \quad (1) \end{array}$$

Đặt: $\widehat{BSC} = \alpha$, $\widehat{CSA} = \beta$, $\widehat{ASB} = \gamma$

Thì $\begin{cases} \alpha, \beta, \gamma > 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 180^0 \end{cases}$

Khi đó: $SA^2 + SB^2 + SC^2 + AB^2 + BC^2 + CA^2$

$= 9 - 2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) < 7 \qquad (2)$

(Vì $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}.\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$

$= 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2} + 2\sin\frac{\alpha}{2}.\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$

$= 1 + 2\sin\frac{\alpha}{2}(\cos\frac{\beta-\gamma}{2} - \cos\frac{\beta+\gamma}{2})$

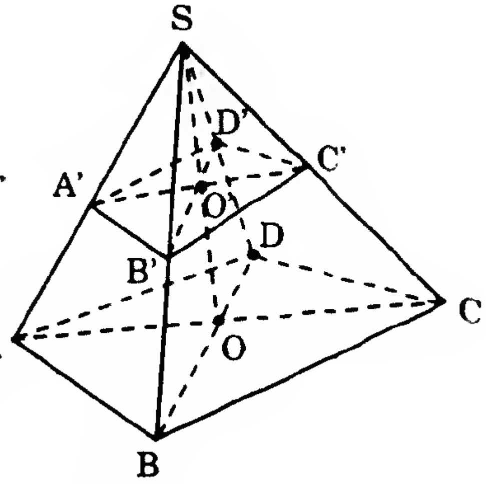
$= 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}.\sin\frac{\beta}{2}.\sin\frac{\gamma}{2} > 1$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Sigma < \frac{7}{2\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{6}$

Bài 11. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD, đáy ABCD là tứ giác lồi có AC và BD cắt nhau tại O. Mặt phẳng (α) cắt SA, SB, SC, SD, SO lần lượt tại A', B', C', D', O'. Chứng minh rằng

$$S_{\Delta BCD}.\frac{SA}{SA'} + S_{\Delta ADB}.\frac{SC}{SC'} = S_{\Delta ABC}.\frac{SD}{SD'} + S_{\Delta ACD}.\frac{SB}{SB'}$$

Giải



Đặt: $OA = \alpha.OC$, $\alpha > 0$

Ta có:

$$\begin{cases} S_{\Delta SAC} = \dfrac{\alpha + 1}{a}.S_{\Delta SAO} = (\alpha + 1)S_{\Delta SCO} \\ \alpha = \dfrac{S_{\Delta ADB}}{S_{\Delta BCD}} \end{cases}$$

(Bạn đọc tự kiểm tra kết quả này)

Do đó, từ: $S_{\Delta SA'C'} = S_{\Delta SA'O'} + S_{\Delta SC'O'}$

$$\Leftrightarrow \frac{S_{\Delta SA'C'}}{S_{\Delta SAC}} = \frac{\alpha}{\alpha+1}.\frac{SA'.SO'}{SA.SO} + \frac{1}{\alpha+1}.\frac{S_{\Delta SC'O'}}{S_{\Delta SCO}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{SA'.SC'}{SA.SC} = \frac{S_{\Delta ADB}}{S_{ABCD}}.\frac{SA'.SO'}{SA.SO} + \frac{S_{\Delta BCD}}{S_{ABCD}}.\frac{SC'.SO'}{SC.SO}$$

$$\Leftrightarrow S_{\Delta ADB}.\frac{SC}{SC'} + S_{\Delta BCD}.\frac{SA}{SA'} = \frac{SO}{SO'}.S_{ABCD} \qquad (1)$$

Chứng minh tương tự

$$S_{\Delta ABC}.\frac{SD}{SD'} + S_{\Delta ACD}.\frac{SB}{SB'} = \frac{SO}{SO'}.S_{ABCD} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ Kết quả bài toán

Chú ý: Trong trường hợp đặc biệt

- Nếu ABCD là hình bình hành thì

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACD} = S_{\Delta ADB} = S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$$

Lúc đó: $\dfrac{SA}{SA'} + \dfrac{SC}{SC'} = \dfrac{SB}{SB'} + \dfrac{SD}{SD'}$

Đây chính là kết quả bài 8 (mục c, chương II)

- Nếu S.ABCD là hình chóp tứ giác đều thì

$$\begin{cases} S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACD} = S_{\Delta ADB} = S_{\Delta BCD} = \dfrac{1}{2}AB^2 \\ SA = SB = SC = SD \end{cases}$$

Lúc đó

$$\frac{1}{SA'} + \frac{1}{SC'} = \frac{1}{SB'} + \frac{1}{SD'}$$

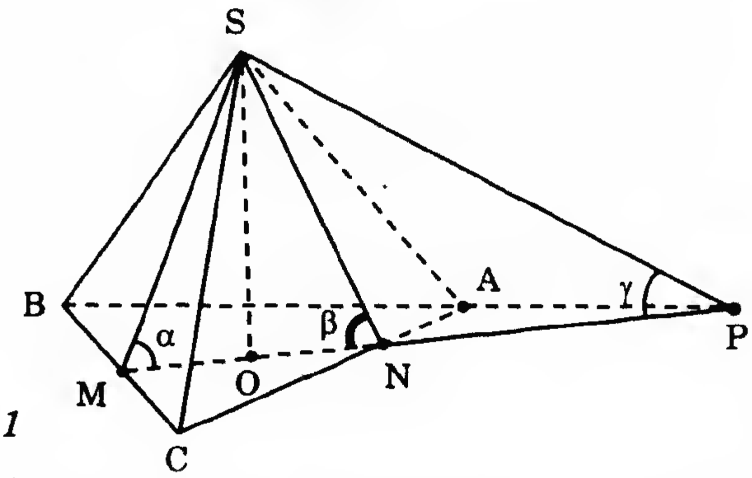
Đây chính là kết quả của một bài toán hình không gian trong đề thi tuyển sinh Đại học bách khoa năm 1977.

Bài 12. Cho tứ diện đều S.ABC. Qùa đường cao SO của tứ diện ta dựng một mặt phẳng cắt các mặt bên theo ba giao tuyến tạo với mặt đáy (ABC) theo các góc α, β, γ.

Chứng minh rằng: $tg^2\alpha + tg^2\beta + tg^2\gamma = 12$

(Đề thi Olympic 30 – 4, năm 2006)

Giải



Hình 1

Gọi M, N, P lần lượt là các giao điểm của mặt phẳng đi qua SO với các đường thẳng BC, CA, AB. Gọi α, β, γ lần lượt là các góc tạo bởi SM, SN, SP với (ABC)

Khi đó: $\widehat{AMO} = x$, $\widehat{ANO} = \beta$, $\widehat{APO} = \gamma$

Đặt $\widehat{HOM} = x$, $\widehat{ION} = y$, $\widehat{KOP} = z$ (xem hình 2)

$$\text{Ta có: } \begin{cases} x + y = 60^0,\ y + z = 120^0 \\ OM = \dfrac{a\sqrt{3}}{6\cos x},\ ON = \dfrac{a\sqrt{3}}{6\cos y},\ OP = \dfrac{a\sqrt{3}}{6\cos z} \\ (\text{Với } AB = a) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{OM^2}+\frac{1}{ON^2}+\frac{1}{OP^2}$$

$$= \frac{12}{a^2}(\cos^2x + \cos^2y + \cos^2z)$$

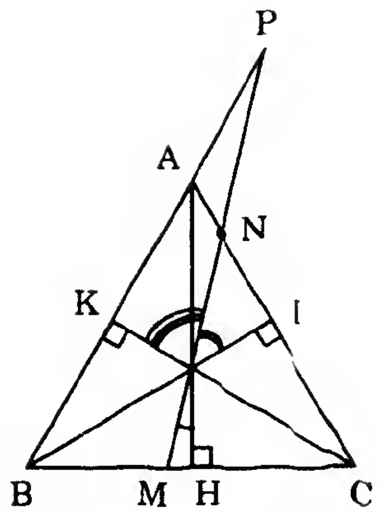
$$= \frac{12}{a^2}[\cos^2(60^0 - y) + \cos^2y + \cos^2(120^0 - y)]$$

$$= \frac{6}{a^2}[3 + \cos(120^0 - 2y) + \cos2y + \cos(240^0 - 2y)]$$

$$= \frac{6}{a^2}[3 + \cos(120^0 - 2y) + \cos(120^0 + 2y) + \cos2y]$$

$$= \frac{6}{a^2}(3 + 2\cos120^0.\cos2y + \cos2y)$$

$$= \frac{6}{a^2}(3 - \cos2y + \cos2y) = \frac{18}{a^2}$$



(Hình 2)

Vậy: $tg^2\alpha + tg^2\beta + tg^2\gamma = SO^2(\frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} + \frac{1}{OP^2})$

$$= \frac{2}{3}a^2.\frac{18}{a^2} = 12$$

Bài 13. Cho tứ diện OABC vuông tại O (nghĩa là có $OA \perp OB$, $OB \perp OC$, $OC \perp OA$). Gọi α, β, γ lần lượt là các góc giữa đường cao OH với các cạnh OA, OB, OC.

Chứng minh rằng: $\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos^2\gamma} + \frac{\cos\beta + \cos\gamma}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos\gamma + \cos\alpha}{\cos^2\beta} \geq \frac{18}{\sqrt{3}}$

(Đề thi Olympic 30 – 4)

Giải

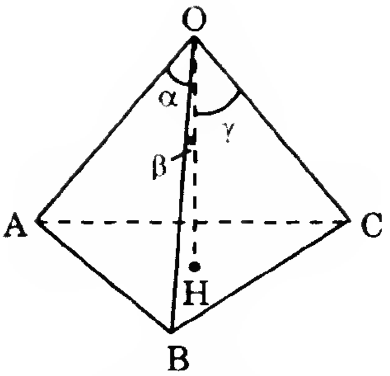
Ta có: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = OH^2\left(\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}\right) = 1$

Đặt: $x = \cos\alpha$, $y = \cos\beta$, $z = \cos\gamma$

$$\left(\Rightarrow \begin{cases} 0 < x, y, z < 1 \\ x^2 + y^2 + 1 \end{cases}\right)$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacopski

$$0 < x + y + z \le \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)} = \sqrt{3}$$



Suy ra: $\sqrt{3}$ VT (*) $\ge (x + y + z)$.VT(*)

$$= (x + y + z)\left(\frac{x+y}{z^2} + \frac{y+z}{x^2} + \frac{z+x}{y^2}\right)$$

$$= \frac{(x+y)^2}{z^2} + \frac{(y+z)^2}{x^2} + \frac{(z+x)^2}{y^2} + \frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y}$$

$$\ge \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) + \frac{1}{3}\left[\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right)\right]^2$$

$$\ge 6 + \frac{1}{3}6^2 = 18 \quad \Rightarrow \text{VT } (*) \ge \frac{18}{\sqrt{3}}$$

Dấu "=" $\Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow OA = OB = OC$.

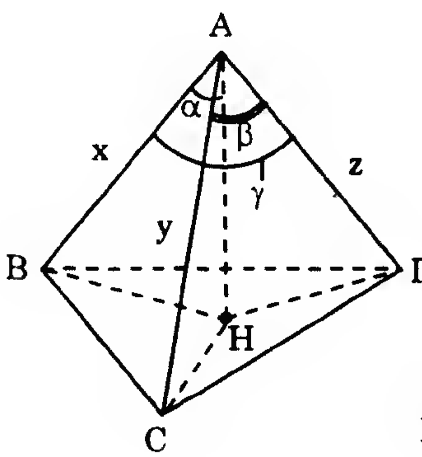
Bài 14. Cho tứ diện ABCD có tổng các góc phẳng ở đỉnh A bằng 180^0 và diện tích các tam giác ABC, ABD, ACD bằng nhau và bằng S, hình chiếu vuông góc của A trên (BCD) thuộc miền trong ΔBCD. Gọi u, v, w lần lượt là góc tạo bởi (BCD) với các mặt (ABC), (ABD), (ACD)

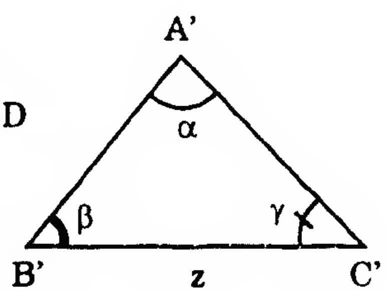
Chứng minh rằng:

$$\sin^2 u + \sin^2 v + \sin^2 w \le \frac{8}{3}$$

(Đề thi Olympic 30 –4)

Giải





Đặt: $\begin{cases} AB = x, AC = y, AD = z \\ \widehat{BAC} = \alpha, \widehat{CAD} = \beta, \widehat{DAB} = \gamma \end{cases}$

$(\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180^0)$

Do: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACD} = S_{\Delta ADB} = S$

$\Leftrightarrow xy\sin\alpha = yz\sin\beta = zx\sin\gamma = 28$

$$\Rightarrow \frac{\sin\alpha}{z} = \frac{\sin\beta}{x} = \frac{\sin\gamma}{y} \quad (1)$$

Xét $\Delta A'B'C'$, với $\begin{cases} \widehat{A'} = \alpha, \widehat{B'} = \beta, \widehat{C'} = \gamma \\ B'C' = z \end{cases}$

Theo định lý hàm sin ta có:

$$\frac{\sin\alpha}{z} = \frac{\sin\beta}{A'C'} = \frac{\sin\gamma}{A'B'} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} A'C' = x \\ A'B' = y \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A'B'C'$

$\Rightarrow BC = B'C' = z$

$\Rightarrow BC = AD$

Chứng minh tương tự: $CD = AB$, $BD = AC$

$\Rightarrow$ ABCD là tứ diện gần đều

(tức là tứ diện có các cặp cạnh đối bằng nhau)

Kẻ $AH \perp (BCD)$ (H nằm trong ΔBCD)

$$\text{Ta có: } \cos u + \cos v + \cos w = \frac{S_{\Delta HBC}}{S_{\Delta ABC}} + \frac{S_{\Delta HBD}}{S_{\Delta ABD}} + \frac{S_{\Delta HCD}}{S_{\Delta ACD}}$$

$$= \frac{S_{\Delta HBC} + S_{\Delta HBD} + S_{\Delta HCD}}{S_{\Delta BCD}} = 1$$

Do đó, theo bất đẳng thức Bunhiacopski, ta có:

$$1 = (\cos u + \cos v + \cos w)^2 \le 3(\cos^2 u + \cos^2 v + \cos^2 w)$$

$$\Rightarrow \cos^2 u + \cos^2 v + \cos^2 w \ge \frac{1}{3}$$

Vậy: $\sin^2 u + \sin^2 v + \sin^2 w \le \dfrac{8}{3}$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \cos u = \cos v = \cos w$

$\Leftrightarrow$ ABCD là tứ diện đều.

Bài 15. Cho tứ diện ABCD có AB = CD, AC = BD, AD = BC

Gọi α, β, γ là số đo các góc mà các mặt ABD, ABC, ACD tạo với (BCD). Giả sử hình chiếu của A trên (BCD) thuộc miền trong ΔBCD. Chứng minh rằng.

$$\cos\alpha(x + \cos\beta) + \cos\beta(y + \cos\gamma) + \cos\gamma(z + \cos\alpha) < 1,$$

$$\forall \begin{cases} x, y, z \in R \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

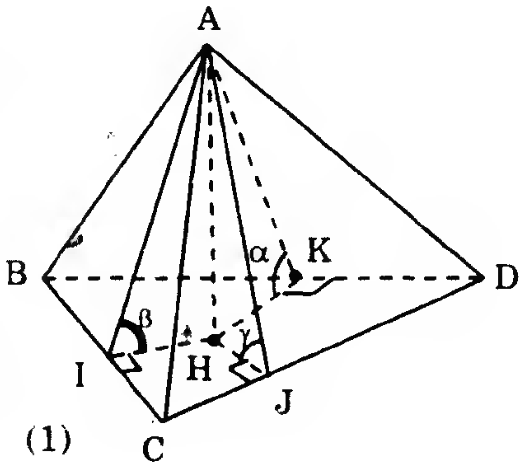
(Đề thi Olympic 30 – 4, năm 2006)

Giải

Gọi H, I, J, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên (BCD), BC, CD, DB.

Khi đó:

$$\begin{cases} \widehat{AKH} = \alpha, \\ \widehat{AIH} = \beta, \quad (0 < \alpha, \beta, \gamma \le \frac{\pi}{2}) \\ \widehat{AJH} = \gamma. \end{cases}$$



Ta có:

$$S_{\Delta BCD} = S_{\Delta HBD} + S_{\Delta HBC} + S_{\Delta HCD}$$
$$= S_{\Delta ABD}.\cos\alpha + S_{\Delta ABC}.\cos\beta + S_{\Delta ACD}.\cos\gamma \quad (1)$$

Do tứ diện ABCD gần đều nên:

$$S_{\Delta BCD} = S_{\Delta ABD} = S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ACD} \ (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 \\ \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \ge 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma < \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 \quad (3)$$

$$\Rightarrow \cos\alpha(x + \cos\beta) + \cos\beta(y + \cos\gamma) + \cos\gamma(z + \cos\alpha)$$
$$= x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma + \cos\alpha.\cos\beta + \cos\beta.\cos\gamma + \cos\gamma.\cos\alpha$$
$$\le \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) + \cos\alpha.\cos\beta$$
$$+ \cos\beta.\cos\gamma + \cos\gamma.\cos\alpha$$
$$\le \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + \frac{1}{2}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2 \le 1$$

$\Rightarrow \cos\alpha(x + \cos\beta) + \cos\beta(y + \cos\gamma) + \cos\gamma(z + \cos\alpha) \le 1$

Dấu "=" $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \cos\alpha \\ y = \cos\beta \\ z = \cos\gamma \end{cases}$

$\Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (Mâu thuẫn với (3))

Vậy: $\cos\alpha(x + \cos\beta) + \cos\beta(y + \cos\gamma) + \cos\gamma(z + \cos\alpha) < 1$

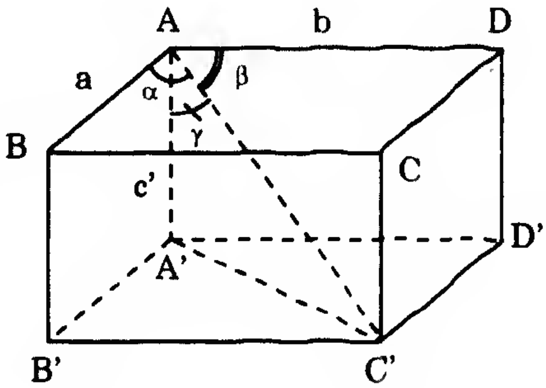
Bài 16. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = a, AD = b, AA' = c. Đường chéo AC' tạo với ba cạnh AB, AD, AA' lần lượt thành các góc α, β, γ. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^{12}}{\cos^{18}\alpha} + \frac{b^{12}}{\cos^{18}\beta} + \frac{c^{12}}{\cos^{18}\gamma} \ge 59049\,(abc)^4$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30 – 4, năm 2006)

Giải

Ta có: $\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{AB}{AC'} = \dfrac{a}{AC'} \\ \cos\beta = \dfrac{AD}{AC'} = \dfrac{b}{AC'} \\ \cos\gamma = \dfrac{AA'}{AC'} = \dfrac{c}{AC'} \end{cases}$



$$\Rightarrow \frac{a^{12}}{\cos^{18}\alpha} + \frac{b^{12}}{\cos^{18}\beta} + \frac{c^{12}}{\cos^{18}\gamma}$$

$$= AC'^{18}\left(\frac{1}{a^6} + \frac{1}{b^6} + \frac{1}{c^6}\right)$$

$$= (a^2 + b^2 + c^2)^9\left(\frac{1}{a^6} + \frac{1}{b^6} + \frac{1}{c^6}\right)$$

$$\ge (3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}\,)^9\left(\frac{3}{\sqrt[3]{a^6.b^6.c^6}}\right)$$

$\ge 3^{10}.(abc)^4 \ge 59049(abc)^4$ (Do bất đẳng thức Cauchy)

Dấu "=" $\Leftrightarrow a = b = c$

$\Leftrightarrow$ ABCD.A'B'C'D' là hình lập phương

Bài 17. Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD. Mặt phẳng (P) thay đổi nhưng luôn cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D' (A', B', C', D' không trùng với các đầu mút của các đoạn thẳng SA, SB, SC, SD).

Chứng minh rằng một trong hai tỷ số $\dfrac{SA' + SC'}{SB' + SD'}$ và $\dfrac{SB'.SD'}{SA'.SC'}$ luôn có ít nhất một số không lớn hơn 1 khi mặt phẳng (P) thay đổi.

(Đề thi đề nghị Olympic 30 – 4, năm 2006)

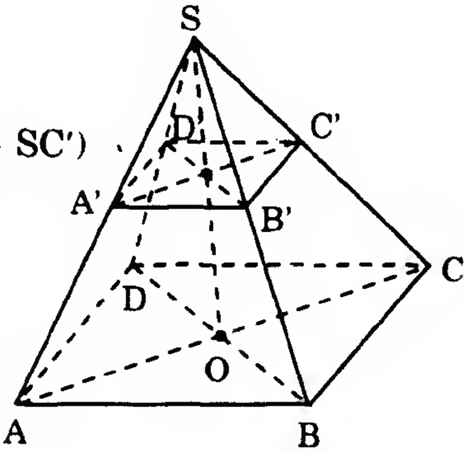
Giải

Gọi O là tâm của đáy ABCD

O' là giao điểm của A'C' và B'D'

Đặt $\widehat{ASC} = 2\varphi$ $(0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2})$

Rõ ràng S, O', O thẳng hàng.



Ta có: $S_{\Delta SA'C'} = S_{\Delta SO'A'} + S_{\Delta SO'C'}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}SA'.SC'.\sin 2\varphi = \dfrac{1}{2}SO'.\sin\varphi(SA' + SC')$

$\Leftrightarrow \dfrac{SA' + SC'}{SA'.SC'} = \dfrac{2\cos\varphi}{SO'}$ (1)

Chứng minh tương tự:

$\dfrac{SB' + SD'}{SB'.SD'} = \dfrac{2\cos\varphi}{SO'}$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \dfrac{SA' + SC'}{SA'.SC'} \cdot \dfrac{SB'.SD'}{SB' + SD'} = 1$

$\Leftrightarrow \dfrac{SA' + SC'}{SB' + SD'} \cdot \dfrac{SB'.SD'}{SA'.SC'} = 1$

Từ đây dễ dàng suy ra có ít nhất một trong hai số

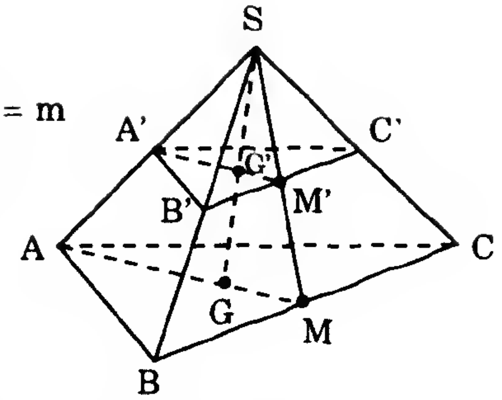
$\dfrac{SA' + SC'}{SB' + SD'}; \dfrac{SB'.SD'}{SA'.SC'}$ không lớn hơn 1 khi (P) thay đổi.

Bài 18. Cho hình chóp S.ABC. G trọng tâm ΔABC. Một mặt phẳng (P) cắt SA, SB, SC, SG theo thứ tự tại A', B', C', G'. Chứng minh rằng:

$$\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} = \frac{3SG}{SG'}$$

(Bộ đề tuyển sinh)

Giải



Đặt: $\begin{cases} \overrightarrow{SA} = \vec{a}, \overrightarrow{SB} = \vec{b}, \overrightarrow{SC} = \vec{c} \\ \dfrac{SA}{SA'} = x, \dfrac{SB}{SB'} = y, \dfrac{SC}{SC'} = z, \dfrac{SG}{SG'} = m \end{cases}$

Ta cần chứng minh x + y + z = 3m

Quả vậy, ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{SA'} = \dfrac{1}{x}\vec{a}, \overrightarrow{SB'} = \dfrac{1}{y}\vec{b}, \overrightarrow{SC'} = \dfrac{1}{z}\vec{c}. \\ \overrightarrow{SG'} = \dfrac{1}{m}\overrightarrow{SG} = \dfrac{1}{3m}(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}) = \dfrac{1}{3m}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \end{cases}$$

(vì G là trọng tâm ΔABC nên $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC} = 3\overrightarrow{SG}$)

Theo giả thiết thì A', B', C', G' đồng phẳng nên

$$\overrightarrow{SG'} = \alpha\overrightarrow{SA'} + \beta\overrightarrow{SB'} + \gamma\overrightarrow{SC'} \ \left(\text{với } \begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \in R \\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \end{cases}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3m}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \frac{\alpha}{x}\vec{a} + \frac{\beta}{y}\vec{b} + \frac{\gamma}{z}\vec{c}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\alpha}{x} = \dfrac{1}{3m} \\ \dfrac{\beta}{y} = \dfrac{1}{3m} \\ \dfrac{\gamma}{z} = \dfrac{1}{3m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{x}{3m} \\ \beta = \dfrac{y}{3m} \\ \gamma = \dfrac{z}{3m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{3m} + \frac{y}{3m} + \frac{z}{3m} = \alpha + \beta + \gamma = 1$$

$\Rightarrow$ x + y + z = 3m (đpcm)

Bài 19. Cho hình chóp O.ABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. M là một điểm tùy ý thuộc mặt đáy. Tìm giá trị nhỏ nhất của $S = \dfrac{AH^2}{AO^2} + \dfrac{BH^2}{BO^2} + \dfrac{CM^2}{CO^2}$

(Đề thi chính thức Olympic 30 – 4, năm 1998)

Giải

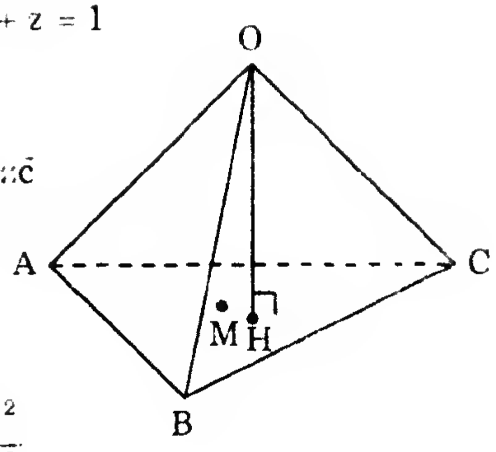
Đặt: $\begin{cases} \overrightarrow{OA} = \vec{a},\ \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c} \\ OA = a,\ OB = b, OC = c \end{cases}$

Ta có $\overrightarrow{OM} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ với $\begin{cases} x, y, z \in R \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

(vì $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ đồng phẳng).

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = (x - 1)\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$

$\Rightarrow \dfrac{AM^2}{a^2} = (x - 1)^2 + y^2\dfrac{b^2}{a^2} + z^2\dfrac{c^2}{a^2}$



Chứng minh tương tự:

$$\frac{BM^2}{b^2} = (y - 1)^2 + z^2.\frac{c^2}{b^2} + x^2.\frac{a^2}{b^2}$$

$$\frac{CM^2}{c^2} = (z - 1)^2 + x^2.\frac{a^2}{c^2} + y^2.\frac{b^2}{c^2}$$

Cộng các đẳng thức trên vế theo vế, ta có:

$$S = \frac{AM^2}{AO^2} + \frac{BM^2}{BO^2} + \frac{CM^2}{CO^2}$$

$$= x^2a^2\left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) + y^2b^2\left(\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2}\right) + z^2c^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$

$$+ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2$$

$$= \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)(x^2a^2 + y^2b^2 + z^2c^2) - 2(x + y + z) + 3$$

$= \dfrac{OM^2}{OH^2} + 1 \geq 2$ (với H là hình chiếu vuông góc của O trên (ABC))

Dấu "=" $\Leftrightarrow$ M $\equiv$ H

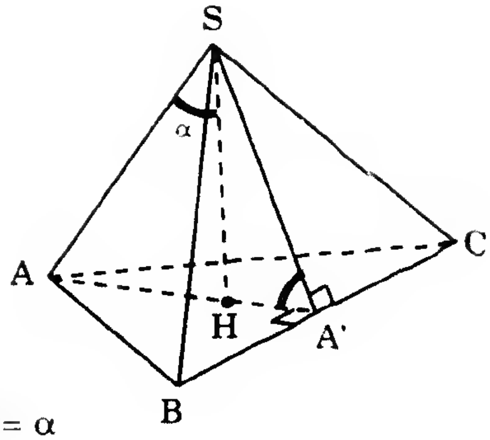
Vậy MinS = 2

Bài 20. Xét các tứ diện S.ABC có SA, SB, SC vuông góc với nhau từng đôi một và các mặt bên (SBC), (SCA), (SAB) theo thứ tự hợp với mặt (ABC) các góc α, β, γ. Tìm giá trị nhỏ nhất của $M = tg^2\alpha + tg^2\beta + tg^2\gamma + cotg^2\beta + cotg^2\gamma$.

(Đề thi chính thức Olympic 30 – 4, năm 2002)

Giải

Gọi H, A' lần lượt là hình chiếu vuông của S trên (ABC), BC.



Dễ dàng chứng minh được rằng

$$\begin{cases} A, H, A' \text{ thẳng hàng} \\ H \text{ trực tâm } \Delta ABC \end{cases}$$

Khi đó:

$$\begin{cases} (\widehat{(SBC), (ABC)}) = \widehat{SA'H} = \widehat{ASH} = \alpha \\ \dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{SA'^2} = \dfrac{1}{SA^2} + \dfrac{1}{SB^2} + \dfrac{1}{SC^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{SH^2}{SA^2} + \frac{SH^2}{SB^2} + \frac{SH^2}{SC^2} = 1$$

Đặt $x = \cos^2\alpha$, $y = \cos^2\beta$, $z = \cos^2\gamma$ ($\Rightarrow \begin{cases} x, y, z > 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$)

Ta có:

$$M = \frac{1-x}{x} + \frac{1-y}{y} + \frac{1-z}{z} + \frac{x}{1-x} + \frac{y}{1-y} + \frac{z}{1-z}$$

$$= \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} + \frac{x}{y+z} + \frac{y}{z+x} + \frac{z}{x+y}$$

$$= \left(\frac{y+z}{4x} + \frac{x}{y+z}\right) + \left(\frac{z+x}{4y} + \frac{y}{z+x}\right) + \left(\frac{x+y}{4z} + \frac{z}{x+y}\right)$$

$$+ \frac{3}{4}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right)$$

$$\geq 1 + 1 + 1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{15}{2}$$

(Do bất đẳng thức Cauchy)

Dấu "=" $\Leftrightarrow x = y = z \Leftrightarrow SA = SB = SC$

Vậy $\text{Min}(M) = \dfrac{15}{2}$.

Bài 21. Trong không gian cho bốn tia phân biệt Ox, Oy, Oz, Ot sao cho các góc tạo bởi hai tia bất kỳ đều bằng nhau. Trên các tia Ox, Oy, Oz, Ot lần lượt lấy các điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng với mọi điểm M trong không gian, ta luôn có:

$$MA + MB + MC + MD \geq OA + OB + OC + OD$$

(Đề thi đề nghị Olympic 30 – 4)

Giải

Lấy các điểm A_0, B_0, C_0, D_0 theo thứ tự trên các tia Ox, Oy, Oz, Ot sao cho $OA_0 = OB_0 = OC_0 = OD_0 = 1$ thì $A_0B_0C_0D_0$ là tứ diện đều có O là tâm. Khi đó:

$$\overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{OB_0} + \overrightarrow{OC_0} + \overrightarrow{OD_0} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{OA}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{OB}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{OC}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{OD}\overrightarrow{OD} = \vec{0} \quad (*)$$

Mặt khác:

$$MA = \frac{MA.OA}{OA} \geq \frac{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{OA}} = \frac{(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})\overrightarrow{OA}}{OA}$$

$$= \frac{1}{OA}\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{MO} + OA$$

Chứng minh tương tự:

$$MB \geq \frac{1}{OB}\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{MO} + OB$$

$$MC \geq \frac{1}{OC}\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OM} + OC$$

$$MD \geq \frac{1}{OD}\overrightarrow{OD}.\overrightarrow{OM} + OD$$

Suy ra $MA + MB + MC + MD$

$$\geq \left(\frac{1}{OA}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{OB}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{OC}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{OD}\overrightarrow{OD}\right)\overrightarrow{OM}$$

$$+ OA + OB + OC + OD \geq OA + OB + OC + OD \text{ (Do (*))}$$

Vậy: $MA + MB + MC + MD \geq OA + OB + OC + OD$

Dấu "=" $\Leftrightarrow M \equiv O$.

D/ BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ÔN TẬP CHƯƠNG III

Bài 1. Cho tứ diện ABCD có M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

☐ a. $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng

☐ b. $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{MN}$ đồng phẳng

☐ c. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = 4\overrightarrow{MN}$

☐ d. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

Bài 2. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = a, AD = b, AA' = c. Khi đó AC' bằng

☐ a. $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ ☐ b. $a^2 + b^2 + c^2$

☐ c. $\sqrt[3]{abc}$ ☐ d. Một đáp số khác.

Bài 3. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD. Cho AB = 2a, CD= $2a\sqrt{2}$, MN = $a\sqrt{5}$. Góc giữa AB và CD bằng

☐ a. 15^0 ☐ b. 30^0 ☐ c. 45^0 ☐ d. 60^0

Bài 4. Cho hình lập phương ABCD.EFGH. Hãy xác định góc giữa $\overrightarrow{AF}$ và $\overrightarrow{EG}$

☐ a. 30^0 ☐ b. 60^0 ☐ c. 90^0 ☐ d. 120^0

Bài 5. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại A, O trung điểm BC, SO ⊥ (ABC). Khi đó mệnh đề nào sau đây là sai?

☐ a. AB ⊥ SO.

☐ b. Hình chiếu của SA trên (ABC) là OA.

☐ c. Hình chiếu của SB trên (SAO) là OB.

☐ d. Hình chiếu của SC trên (SAO) là SO.

Bài 6. Cho hình chóp S.ABCD có ABCD là hình thoi cạnh a và SA = SB = SC = a. Khi đó:

☐ a. ΔSBD đều ☐ b. ΔSBD có góc 60^0

☐ c. ΔSBD vuông cân ☐ d. Một đáp số khác.

Bài 7. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = a, BC = b, CC' = c. Tính khoảng cách từ B đến (AA'C'C).

☐ a. $\frac{1}{2}(a + b)$ ☐ b. $\sqrt{a.b}$

☐ c. $\sqrt{a^2 + b^2}$ ☐ d. $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Bài 8. Khoảng cách giữa hai cạnh đối của một tứ diện đều cạnh a bằng kết quả nào trong các kết quả sau đây:

☐ a. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ ☐ b. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

☐ c. $\frac{a}{2}$ ☐ d. Tất cả đều sai.

Bài 9. Cho hai đường thẳng a và b lần lượt có vectơ chỉ phương là $\vec{u}$ và $\vec{v}$. Hãy tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

☐ a. Nếu $a \perp b$ thì $\vec{u}.\vec{v} = 0$

☐ b. Nếu $\vec{u}.\vec{v} = 0$ thì $a \perp b$

☐ c. Nếu φ là góc giữa a và b thì $\cos\varphi = \frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$

☐ d. Nếu φ là góc giữa a và b thì $\cos\varphi = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$.

Bài 10. Cho tứ diện đều ABCD cạnh a. Gọi MN lần lượt trung điểm của BC, CD. Hãy chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau:

☐ a. $|\overrightarrow{MN}| = \frac{a}{2}$ ☐ b. $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{DN} < 0$

☐ c. $\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{CN} = 5a^2$ ☐ d. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BM} = -\frac{a^2}{4}$.

Bài 11. Cho hình hộp chữ nhật S.ABCD có ABCD là hình vuông và SA ⊥ (ABCD). Hãy tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau:

☐ a. (SAC ⊥ (ABC) ☐ b. (SAC) ⊥ (SCD)

☐ c. (SAB) ⊥ (ABCD) ☐ d. (SAD) ⊥ (ABCD).

Bài 12. Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $0A = OB = OC = \sqrt{5}$. Gọi I là trung điểm của BC. Tính d(AI, OC).

☐ a. 4 ☐ b. 3 ☐ c. 2 ☐ d. 1.

Bài 13. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có ABCD là hình vuông cạnh a và các cạnh bên đều bằng $a\sqrt{2}$. Qua A dựng mặt phẳng (D) vuông góc với SC tại C', mặt phẳng này cắt SB và SD' lần lượt tại B' và D'. Tính diện tích thiết diện AB'C'D'.

☐ a. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ ☐ b. $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$

☐ c. $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$ ☐ d. $\frac{a^2\sqrt{2}}{8}$.

Bài 14. Cho ΔABC có AB = 7, BC = 5, CA = 8. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại A, ta lấy điểm O sao cho AO = 4. Tính khoảng cách từ O đến đường thẳng BC.

☐ a. $8\sqrt{2}$ ☐ b. $10\sqrt{2}$

☐ c. 8 ☐ d. 10.

ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5	6	7
Đáp án	d	a	c	b	d	c	d
Câu	8	9	10	11	12	13	14
Đáp án	a	d	c	b	d	a	c

Chương IV.

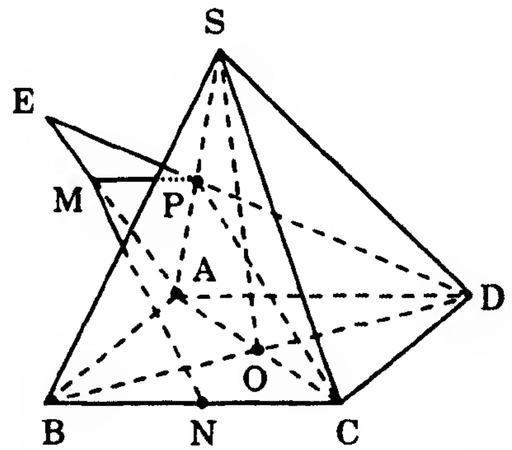
• GIỚI THIỆU MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN TRONG CÁC ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG TỪ NĂM 2000 ĐẾN 2007
• BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ÔN TẬP CUỐI NĂM

A/ GIỚI THIỆU MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC KHÔNG GIAN TRONG CÁC ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC VÀ CAO ĐẲNG TỪ NĂM 2000 ĐẾN NĂM 2007

Bài 1. Cho hình chóp tứ diện đều S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Gọi E là điểm xứng của D qua trung điểm của SA, M trung đểm của AB, N là trung điểm của BC. Chứng minh rằng HN $\perp$ BD và tính d(MN, AC) theo a.

(Đại học và Cao đẳng, khối B, năm 2007)

Giải



- Gọi P trung điểm SA.

  Ta có MNCP là hình bình hành nên MN // (SAC).

  Mặt khác BD $\perp$ (SAC)

  Nên MN $\perp$ BD

  Vì MN // (SAC) nên

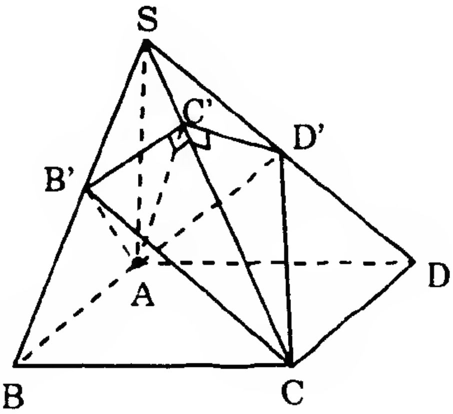
  $$d(MN, AC) = d(MN, (SAC)) = d(N, (SAC)) = d(B, (SAC)) = \frac{1}{2}BO = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

  Vậy $d(MN, AC) = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Bài 2. Trong mặt phẳng (P), cho hình vuông ABCD. Trên đường thẳng Ax vuông góc với mặt phẳng (P) ta lấy điểm S bất kì, dựng mặt phẳng (Q) đi qua A và vuông góc với SC. Mặt phẳng (Q) cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Chứng minh: B, D, B', D', C' cùng nhìn AC dưới một góc vuông.

(Cao đẳng Kinh tế Kĩ thuật Công nghiệp II, khối A, năm 2006)

Giải



Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow AB' \perp BC \\ \text{Mặt khác } AB' \perp SC \end{array}\right\}$$

$\Rightarrow AB' \perp (SBC)$

$\Rightarrow AB' \perp B'C$ (1)

Chứng minh tương tự $AD' \perp D'C$ (2)

Cũng cho: $SC \perp (Q)$

$\Rightarrow AC' \perp C'C$ (3)

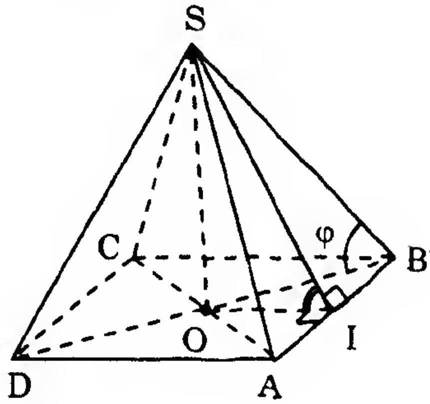
Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \widehat{AB'C} = \widehat{AD'C}$

$= \widehat{AC'C} = \widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90^0$ (đpcm)

Bài 3. Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có cạnh đáy bằng a, góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng φ ($0^0 < \varphi < 90^0$). Tính tang của góc giữa (SAB) và (ABCD).

(Đại học và Cao đẳng, khối B, năm 2004)

Giải



Gọi O là tâm hình bình hành ABCD và I là trung điểm cạnh AB, khi đó:

$$\left(\widehat{(SAB),(ABCD)}\right) = \widehat{SID}$$

Hơn nữa: $SO = OBtg\widehat{SBD} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}.tg\varphi$

Do đó: $\text{tg}\left(\widehat{(SAB),(ABCD)}\right) = \text{tg}\,\widehat{SID} = \dfrac{SO}{SI}$

$$= \dfrac{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}\text{tg}\varphi}{\dfrac{a}{2}} = \sqrt{2}\,\text{tg}\varphi$$

Bài 4. Cho hình chóp S.ABCD có ABC là tam giác vuông cân $AB = AC = a. SA \perp (ABC)$ và $SA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính góc giữa (SBC) và (SAC).

(Cao đẳng Xây dựng số 2, năm 2005)

Giải

Kẻ $AJ \perp SC$ tại J

Ta có: $\left(\widehat{(SBC),(SAC)}\right) = \widehat{AIB}$ (Bạn đọc tự kiểm tra điều này)

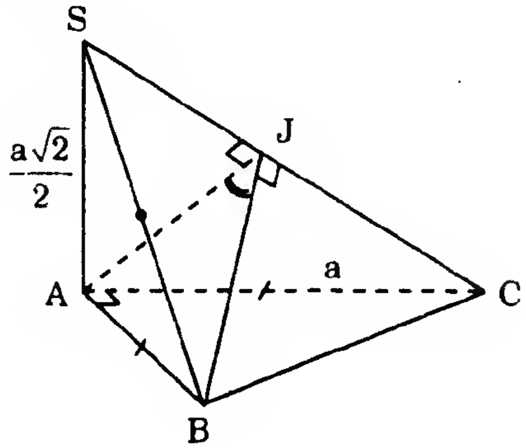
Mà $\dfrac{1}{AJ^2} = \dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AC^2} = \dfrac{2}{a^2} + \dfrac{1}{a^2} = \dfrac{3}{a^2}$

$\Rightarrow AJ = = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow \text{tg}\,\widehat{AIB} = \dfrac{AB}{AJ} = \dfrac{a}{\dfrac{a\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}$

$\Rightarrow \widehat{AIB} = 60^0$

$\Rightarrow \left(\widehat{(SBC),(SAC)}\right) = 60^0$

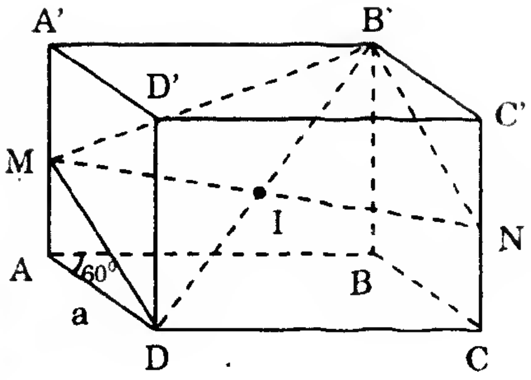


Bài 5. Cho hình lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^0$. Gọi M là trung điểm cạnh AA' và N là trung điểm cạnh CC'. Chứng minh rằng bốn điểm B', M, D, N cùng thuộc mặt phẳng. Hãy tính AA' theo a để tứ giác B'MDN là hình vuông.

(Đại học và Cao đẳng, khối B năm 2003)

Giải

• Ta có: A'H // NC



$\Rightarrow$ A'MCN là hình bình hành

$\Rightarrow$ A'C và MN cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường.

Mặt khác A'DCB' là hình hình hành.

Trung điểm I của A'C cũng chính là trung điểm của B'D.

Vậy MN là B'D cắt nhau tại trung điểm I của mỗi đường nên B', M, D, N cũng thuộc một mặt phẳng.

• Ta có $\Delta MAD = \Delta NCD$

$\Rightarrow DM = DN \Rightarrow$ B'MDN là hình thoi

Do đó B'MDN là hình vuông $\Leftrightarrow AC = B'D$

$\Leftrightarrow AC^2 = B'D^2 = B'B^2 + BD^2$

$\Leftrightarrow 3a^2 = B'B^2 + a^2$

$\Leftrightarrow B'B = a\sqrt{2}$

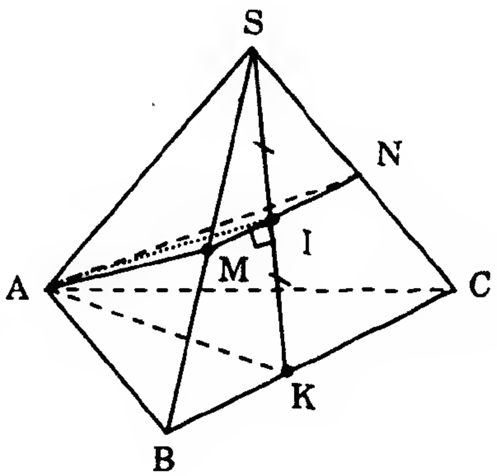
$\Leftrightarrow AA' = a\sqrt{2}$

Bài 6. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC cạnh đáy bằng d. Gọi M, N lần lượt là các trung điểm của SB, SC. Tính theo a diện tích tam giác AMN, biết rằng $(AMN) \perp (SBC)$

(Đại học và Cao đẳng, khối A, năm 2002)

Giải

Gọi K là trung điểm cạnh BC



và $\{I\} = SJ \cap MN$.

Ta có: $\Delta SAB = \Delta SAC$

$\Rightarrow AM = AN$

$AI \perp MN$

Mặt khác $\begin{cases} (SBC) \perp (AMN) \\ (SBC) \cap (AMN) = MN \\ AI \subset (AMN) \\ AI \perp MN \end{cases}$

$\Rightarrow AI \perp (SBC)$

$\Rightarrow AI \perp AK$

$\Rightarrow \Delta SAK$ cân tại A

$\Rightarrow SA = AK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow AI^2 = SA^2 - SI^2 = SA^2 - \dfrac{SK^2}{4} = \dfrac{3a^2}{4} - \dfrac{a^2}{8} = \dfrac{5a^2}{8}$

$\Rightarrow AI = \dfrac{a\sqrt{10}}{4}$

$\Rightarrow S_{\Delta AMN} = \dfrac{1}{2}AI.MN = \dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{10}}{4}.\dfrac{a}{2} = \dfrac{a^2\sqrt{10}}{16}$ (đvdt)

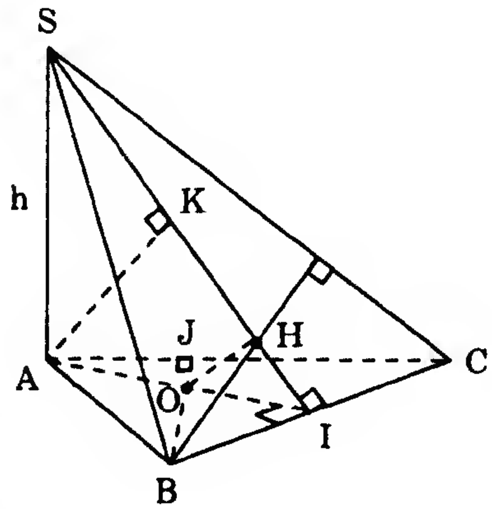
Bài 7. Cho hình chóp SABC có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và SA ⊥ (ABC). Đặt SA = h.

a) Tính khoảng cách từ A đến (SBC) theo a và h.

b) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC và H là trực tâm ΔSBC. Chứng minh rằng OH ⊥ (SC)

(Học viện Chính trị Quốc Gia, năm 2001)

Giải



a) Gọi I là trung điểm của BC

Ta có: Kẻ AK SI tại K

$\left.\begin{array}{l} BC \perp AI \\ BC \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAI)$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} AK \perp BC \\ \text{Lại có } AK \perp SI \end{array}\right\} \Rightarrow AK \perp (SBC)$

$d(A, (SBC)) = AK = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{AS^2} + \dfrac{1}{AI^2}}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{h^2} + \dfrac{4}{3a^2}}} = \dfrac{ah\sqrt{3}}{\sqrt{3a^2 + 4h^2}}$

b) Theo chứng minh trên: BC ⊥ (SAI)

$\Rightarrow BC \perp OH$ (1)

Mặt khác $\left.\begin{array}{l} OB \perp AC \\ OB \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow OB \perp (SAC)$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} SC \perp OB \\ \text{Lại có } SC \perp BH \end{array}\right\} \Rightarrow SC \perp (BOH)$

$\Rightarrow SC \perp OH$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow OH \perp (SBC)$

Bài 8. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có AB = a, AD = 2a, AA' = a.

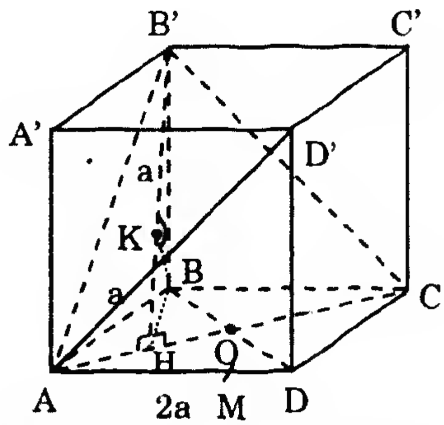
a) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AD' và B'C

b) Gọi M là điểm trên đoạn AD sao cho $\frac{AM}{MD} = 3$. Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (AB'C).

(Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông, năm 2001)

Giải

a) Ta có: $\begin{cases} AD' \subset (AA'D'D) \\ B'C \subset (BB'C'C) \\ (AA'D'D) \parallel (BB'C'C) \end{cases}$



$\Rightarrow d(AD', B'C)$

$= d((AA'D'D), (BB'C'C))$

$= d(D, (BB'C'C))$

$= DC = a$

b) Ta có AC và BD cắt nhau tại O trung điểm mỗi đường. Do đó $d(B, (AB'C)) = d(D, (AB'C))$

Mặt khác, vì $AM = \frac{3}{4}AD$ nên

$$d(M, (AB'C)) = \frac{3}{4}d(D,(AB'C)) = \frac{3}{4}d(B, (AB'C))$$

Kẻ $BH \perp AC$, $BK \perp B'H$ ($H \in AC$, $K \in B'H$)

Ta có: $\left.\begin{array}{r} AC \perp BH \\ AC \perp BB' \end{array}\right\} \Rightarrow AC \perp (BB'H)$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} BK \perp AC \\ \text{Lại có } BK \perp B'H \end{array}\right\} \Rightarrow BK \perp (AB'C)$

Do đó: $d \subset (M, (AB'C)) = \frac{3}{4}d(B, (AB'C)) = \frac{3}{4}BK.$

Mà $BH = \dfrac{BA.BC}{AC} = \dfrac{a.2a}{\sqrt{5}.a} = \dfrac{2a}{\sqrt{5}}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{BK^2} = \dfrac{1}{BB'^2} + \dfrac{1}{BH^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{5}{4a^2} = \dfrac{9}{4a^2}$

$\Rightarrow BK = \dfrac{2a}{3}$

Vậy: $d(M, (AB'C)) = \dfrac{a}{2}$

Bài 9. Cho tứ diện A.ABC có $SC = CA = AB = a\sqrt{2}$, $SC \perp (ABC)$, ΔABC vuông tại A, M thuộc cạnh SA và N thuộc cạnh BC sao cho $AM = CN = t \in (0, 2a)$.

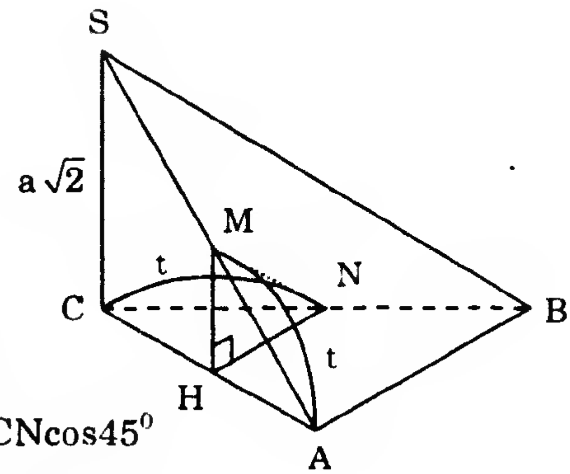
a) Tính MN theo a và t.

b) Tìm t để MN ngắn nhất.

c) Khi đoạn MN ngắn nhất. Chứng minh rằng MN là đường vuông góc chung của BC và SA.

(Đại học Đà Nẵng, năm 1002)

Giải



a) Kẻ $MH \perp (ABC)$ $(H \in AC)$.

Ta có: $MN^2 = MH^2 + HN^2$

$= \dfrac{t^2}{2} + HN^2$ (1)

Mà $CH = CA - AH$

$= a\sqrt{2} - \dfrac{t}{\sqrt{2}} = \dfrac{2a - t}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow HN^2 = CH^2 + CN^2 - 2CH.CN\cos 45^0$

$= \dfrac{(2a-t)^2}{2} + t^2 - \sqrt{2}\,\dfrac{2a-t}{\sqrt{2}}.t$

$= \dfrac{1}{2}(2a - t)^2 + t^2 - (2a - t)t$

$= 5\dfrac{t^2}{2} - 4at + 2a^2$

Thế (2) vào (1), ta có: $MN = \sqrt{3t^2 - 4at + 2a^2}$

b) Theo câu a, ta có MN = $\sqrt{3(t - \frac{24}{3})^2 + \frac{2a^2}{3}}$

$$\Rightarrow \text{Min(HN)} = \frac{\sqrt{6}}{3}a \left(\text{tại } t = \frac{2a}{3}\right)$$

c) Khi $t = \frac{2a}{3}$, ta có: $AH = CN = \frac{2a}{3}$

- Xét ΔACN thì

$$AN^2 = AC^2 + CN^2 - 2AC.CN.\cos 45^0$$

$$= \left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2 - 2.a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 2a^2 + \frac{4a^2}{9} - \frac{4a^2}{3} = \frac{10a^2}{9}$$

Mà $\qquad AM = \frac{2a}{3}, MN = \frac{\sqrt{6}a}{3}$

$$\Rightarrow AN^2 = AM^2 + MN^2$$

$$\Rightarrow MN \perp SA \qquad (3)$$

- Chứng minh tương tự $MN \perp BC$ $\qquad$ (4)

Từ (1) và (4) ⇒ MN đường vuông góc chung của SA và MN.

Bài 10. Trong mặt phẳng (P) cho nửa đường tròn (C) đường kính AC, B là điểm thuộc (C). Trên nửa đường thẳng Ax vuông góc với (P), H, K lần lượt là các chân đường vuông góc hạ từ A xuống các đường thẳng SB, SC.

a) Chứng minh rằng các tam giác SBC, AHK là các tam giác vuông.

b) Tính HK theo AC và BC.

c) Xác định vị tự của B trên (C) sao cho tổng diện tích hai tam giác SAB và CAB lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất.

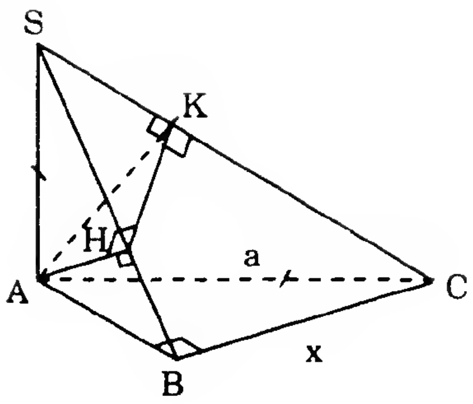
(Đại học Vinh, khối A, B) năm 2001)

Giải

a) • Ta có: $\left.\begin{array}{l} SA \perp (ABC) \\ AB \perp BC \end{array}\right\} \Rightarrow SB \perp BC$

(Định lí ba đường vuông góc)

$\Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại B.



- Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB)$$

$\Rightarrow AH \perp (SAB)$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \quad AH \perp BC \\ \text{Lại có } AH \perp SB \end{array}\right\} \Rightarrow AH \perp (SBC)$$

$\Rightarrow AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow \Delta AHK$ vuông tại H

b) Đặt $\begin{cases} AS = AS = a \\ BC = x \qquad (0 < x < a) \end{cases}$

Ta có: $\Delta SKH \backsim \Delta SBC$

$$\Rightarrow \frac{SH}{SC} = \frac{HK}{BC}$$

$$\Rightarrow HK = \frac{SH.BC}{SC} = \frac{(SH.SB).BC}{SC.SB}$$

$$= \frac{S^2A.BC}{SC.SB} = \frac{a^2.x}{a\sqrt{2}.\sqrt{2a^2 - x^2}}$$

Vậy: $HK = \dfrac{ax}{2(2a^2 - x^2)}$

c) Ta có: $\sum = S_{\Delta SAB} + S_{\Delta CAB}$

$$= \frac{1}{2}\left(a\sqrt{a^2 - x^2} + x\sqrt{a^2 - x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(a + x)\sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$\Rightarrow \sum{}^2 = \frac{1}{12}(3a - 3x)(a + x)(a + x)(a + x)$$

$$\leq \frac{1}{12}\left(\frac{3a - 2x + a + x + a + x + a + x}{4}\right)^4 \leq \frac{1}{12}\left(\frac{3a}{2}\right)^4$$

(Do bất đẳng thức Cauchy)

$\Rightarrow \Sigma \le \dfrac{a\sqrt{3}}{8}a^2$

Dấu "=" $\Leftrightarrow 3a - 3x = a + x$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{a}{2}$

$\Leftrightarrow \widehat{BAC} = 30^0$

Vậy: $\text{Max } \Sigma = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}a^2 \Leftrightarrow \widehat{BAC} = 30^0$

Bài 11. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Gọi M là một điểm bất kì thuộc AB.

a) Đặt $AM = m \in (0, a)$. Tính giá trị của m theo a để góc giữa hai đường thẳng DM và AC' bằng 60^0.

b) Khi M là trung điểm của AB, hãy tính diện tích của hình lập phương cắt bởi mặt phẳng (B'DM) theo a.

(Cao đẳng sư phạm nhà trẻ mẫu giáo Trung ương I năm 2001)

Giải

a) Kẻ AI // DM ($I \in CD$)

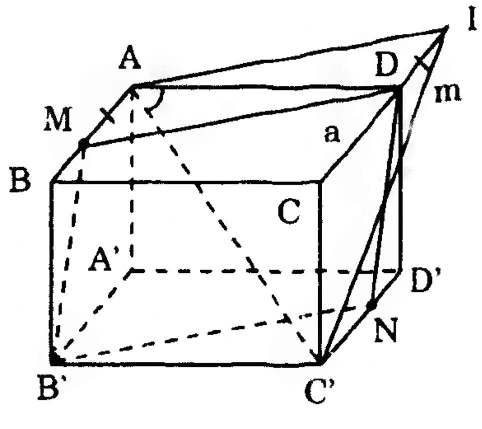
Đặt $\alpha = (\widehat{DM, AC'})$

Khi đó:

$$\cos\alpha = \left|\cos\widehat{C'AI}\right|$$

$$= \frac{\left|3a^2 + a^2 + m^2 - (a^2 + (a+m)^2\right|}{2.a\sqrt{3}\sqrt{a^2 + m^2}}$$

$$= \frac{a - m}{\sqrt{3}.\sqrt{a^2 + m^2}} = \frac{1}{2}$$



(Để ý $m \in (0, a)$)

$\Leftrightarrow 4(a - m)^2 = 3(a^2 + m^2)$

$\Leftrightarrow m^2 - 8am + a^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} m = (4 + \sqrt{15})a & \text{(loại)} \\ m = (4 - \sqrt{15})a & \text{(nhận)} \end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow m = (4 - \sqrt{15})a$

b) Khi M là trung điểm của AB thì (B'DM) cắt C'D' tại trung điểm N của C'D'. Thiết diện của hình lập phương cắt bởi (B'DM) là hình thoi B'MDN. Do đó:

$$S_{B'MDN} = \frac{1}{2}B'D.MN$$

$$= \frac{1}{2}a\sqrt{3}.a\sqrt{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{2}$$

Bài 12. Cho hình lăng trụ ABC.A'B'C' có đáy là tam giác đều ABC cạnh a. Lấy trên BB' và CC' các đoạn BM = x, CN = y.

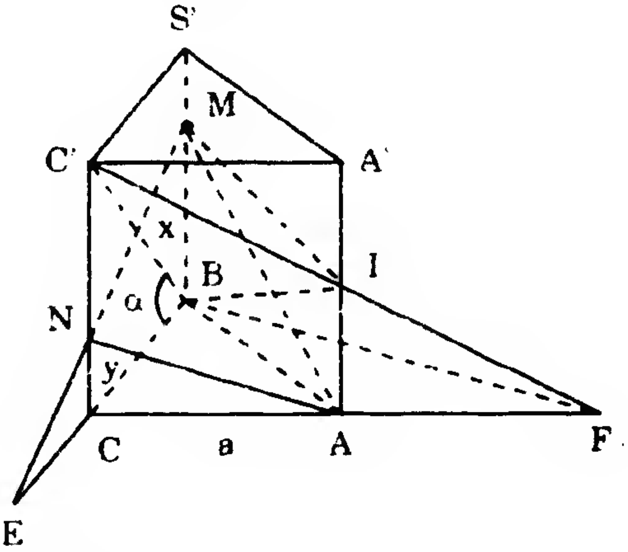
a) Chứng minh rằng: ΔAMN chỉ có thể vuông ở M hay N. Tìm hệ thức giữa x, y để ΔAMN vuông ở M.

b) Chứng minh rằng: Nếu x = y thì (AMN) luôn chứa một đường thẳng cố định.

c) Gọi I là trung điểm của đoạn AA' và α là góc hợp bởi (BIC') và (ABC). Tính AA' theo a và α.

(Trung tâm Đào tạo và Bồi dưỡng cán bộ Y tế, năm 2000)

Giải



a) Ta có: $\begin{cases} MN^2 = a^2 + (x-y)^2 \\ AM^2 = a^2 + x^2 \\ AN^2 = a^2 + y^2 \end{cases}$

• ΔAMN vuông tại A

$\Leftrightarrow MN^2 = AM^2 + AN^2$

$\Leftrightarrow a^2 + (x - y)^2 = 2a^2 + x^2 + y^2$

$\Leftrightarrow xy = -\dfrac{a^2}{2} < 0$

Điều này không xảy ra.

- ΔAMN vuông tại M

$\Leftrightarrow MN^2 + AM^2 = AN^2$

$\Leftrightarrow a^2 + (x - y)^2 + a^2 + x^2 = a^2 + y^2$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 2yx + a^2 = 0$

- ΔAHN vuông tại N

$\Leftrightarrow MN^2 + AN^2 = AM^2$

$\Leftrightarrow a^2 + (x - y)^2 + a^2 + y^2 = a^2 + x^2$

$\Leftrightarrow 2y^2 - 2xy + a^2 = 0$

b) Gọi E là giao điểm của MN và BC

Do $x = 2y \Rightarrow \overline{BE} = 2\overline{BC}$

$\Rightarrow$ E cố định

$\Rightarrow$ (AMN) luôn chứa đường thẳng AE cố định.

c) Gọi F là giao điểm của C'I và CA.

Rõ ràng A là trung điểm CF.

Và ΔCBF có AB = AC = AF

$\Rightarrow \Delta CBF$ vuông tại B

$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow \quad BF \perp BC \\ \text{Lại có } BF \perp BB'\end{array}\right\} \Rightarrow BF \perp (BB'C)$

$\Rightarrow \left(\widehat{(BIC'),(ABC)}\right) = \widehat{CBC'} = \alpha$

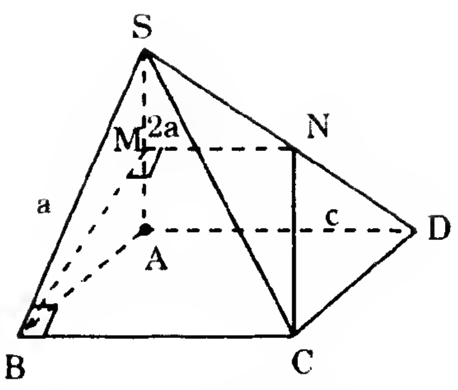
$\Rightarrow AA' = CC' = a\text{tg}\alpha$

Bài 13. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, $SA \perp (ABCD)$, AB = a, AI = b, SA = 2a. Gọi M là trung điểm SA. Mặt phẳng (MBC) cắt hình chóp theo thiết diện là hình gì? Tính diện tích thiết diện ấy.

(Đại học Đà Lạt, năm 2000)

Giải

- Gọi N là trung điểm cạnh SD. Ta có MNCB là thang vuông và chính là thiết diện cần tìm.



- $S_{MNCB} = \dfrac{1}{2}BM(BC + MN)$

$$= \frac{1}{2}a\sqrt{2}\left(b + \frac{b}{2}\right) = \frac{3ab\sqrt{2}}{4}$$

Bài 14. Cho tứ diện S.ABC co ΔABC vuông cân tại B, AC = 2a, SA = a và SA ⊥ (ABC).

a) Tính khoảng cách từ A đến (SBC)

b) Gọi O là trung điểm của AC. Tính khoảng cách từ O đến (SBC).

(Đại học Huế, năm 2000)

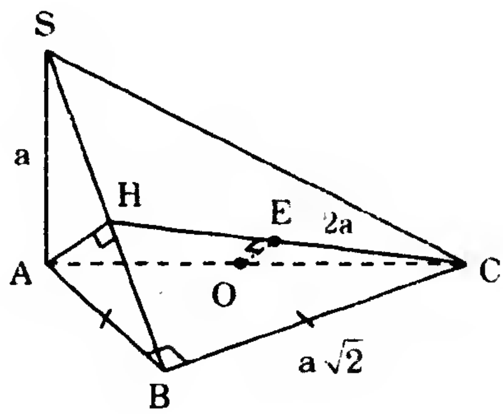
Giải

a) Kẻ AH ⊥ SB (H ∈ SB)

Ta có. $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \text{ (vì } SA \perp (ABC)) \end{cases}$

$\Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow AH \perp BC \\ \text{Lại có } AH \perp SB \end{array}\right\} \Leftrightarrow AH \perp (SBC)$



$$\Rightarrow d(A,(SBC)) = AH = \frac{SA.AB}{SB}$$

$$= \frac{a.a\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

b) Gọi E là trung điểm của CH

Khi đó $\begin{cases} OE \,//\, AH \\ OE = \dfrac{1}{2}AH \end{cases}$

Mà AH ⊥ (SBC) (chứng minh trên)

Nên OE ⊥ (SBC)

Do đó: $d(O,(SBC)) = OE = \dfrac{1}{2}AH = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$

Bài 15. Cho tứ diện ABCD có các cạnh thỏa mãn:

$$AB^2 + CD^2 = AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$$

Chứng minh rằng trong bốn mặt của tứ diện, phải có ít nhất một mặt là tam giác có ba góc nhọn.

(Đại học Kinh tế Quốc dân Hà Nội, khối A, năm 2000 và đề thi học sinh giỏi Toán 11 của tỉnh Đồng Nai, năm 1989).

Giải

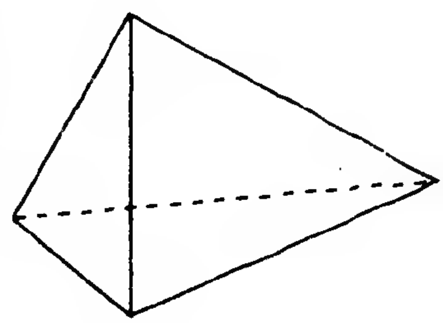
Bước 1: Ta chứng minh rằng: Nếu có một trong ba góc phẳng ở đỉnh A $\geq 90^0$ thì hai góc phẳng còn lại cũng $\geq 90^0$.

Quả vậy, giả sử $\widehat{BAC} \geq 90^0$

Theo định lí hàm số cosin:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\widehat{BAC} \geq AB^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow AD^2 + BC^2 \geq AB^2 + AC^2 + AD^2$$



$$\Rightarrow \begin{cases} AB^2 + CD^2 \geq AB^2 + AC^2 + AD^2 \\ AC^2 + BD^2 \geq AB^2 + AC^2 + AD^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} CD^2 \geq AC^2 + AD^2 \\ BD^2 \geq AB^2 + AD^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \widehat{CAD} \geq 90^0 \\ \widehat{BAD} \geq 90^0 \end{cases}$$

Bước 2:

- Nếu bốn mặt của tứ diện đều là tam giác có ba góc nhọn thì điều cần chứng minh là hiển nhiên đúng.
- Nếu một trong ba góc phẳng ở đỉnh A (chẳng hạn) không nhọn thì theo kết quả bước 1, ta có hai góc phẳng còn lại cũng không nhọn.

Do đó các góc phẳng ở các đỉnh B, C, D (không thuộc (BCD)) đều nhọn, cho nên ΔBCD cũng nhọn (vì nếu chẳng hạn có góc B không nhọn thì áp dụng kết quả bước 1, suy ra các góc phẳng ở đỉnh B đều không nhọn (mâu thuẫn với lí luận trên).

Bài 16. Cho hình chóp S.ABCD, ABCD là hình thang vuông, đường cao $AB = BC = \frac{1}{2}AD = a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và $SA \perp (ABCD)$.

a) Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông.

b) Lấy $M \in$ cạnh BC, $BM = x \in (0, a)$. Gọi (P) là một mặt phẳng qua M và song song với SA, CD cắt AD, SD, SC lần lượt tại N, P, Q. Tính S_{MNPQ} theo a va x.

(Học viện Chính trị Quốc gia, Tp. Hồ Chí Minh, 2000)

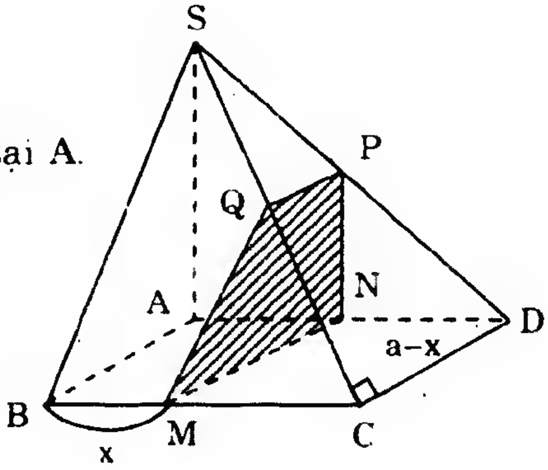
Giải

a) • Ta có:

$SA \perp (ABCD)$

$\Rightarrow SD \perp AB$ và $SA \perp AD$

$\Rightarrow \Delta SAB$ và ΔSAD đều vuông tại A.



• Ta có:

$\left.\begin{array}{l} BC \perp SA \text{ (vì } SA \perp (ABCD)) \\ BC \perp AB \end{array}\right\}$

$\Rightarrow BC \perp AB$

$\Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp SB$

$\Rightarrow \Delta SAB$ vuông tại B

• Ta có: $\begin{cases} SC^2 = AC^2 + SA^2 = 2a^2 + 2a^2 = 4a^2 \\ SD^2 = SA^2 + AD^2 = 2a^2 + 4a^2 = 6a^2 \\ CD^2 = AB^2 + (AD - BC)^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \end{cases}$

$\Rightarrow SD^2 = SC^2 + CD^2$

$\Rightarrow \Delta SCD$ vuông tại C

b) • Ta có: $\begin{cases} SA \,//\, (P) \\ SA \subset (SAD) \\ (SAD) \cap (P) = NP \end{cases}$

$\Rightarrow SA \,//\, PN$ (1)

Chứng minh tương tự: $MN \,//\, CD$, $PQ \,//\, CD$ (2)

Từ (2) $\Rightarrow$ MN // PQ (3)

Mà SA $\perp$ (ABCD) nên cùng với (1), ta có:

$$PN \perp (ABCD)$$

$$\Rightarrow PN \perp MN \quad (4)$$

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ MNPQ là hình thang vuông có PN là đường cao.

- Ta có: $MN = CD = a\sqrt{2}$

Mặt khác: $\begin{cases} \dfrac{PQ}{CD} = \dfrac{SP}{SD} = \dfrac{AN}{AD} = \dfrac{a+x}{2a} \\ \dfrac{PN}{SA} = \dfrac{DN}{AD} = \dfrac{a-x}{2a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} PQ = \dfrac{a+x}{\sqrt{2}} \\ PN = \dfrac{a-x}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$$\Rightarrow S_{MNPQ} = \frac{1}{2}PN(MN + PQ)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{a-x}{2}\left(a\sqrt{2} + \frac{a+x}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{(a-x)(3a+x)}{4}$$

Vậy: $S_{MNPQ} = \dfrac{1}{4}(a-x)(3a+x)$

Bài 17. Cho tứ diện ABCD và M là một điểm di động trong không gian G và G_1 lần lượt là trọng tâm của tứ diện ABCD và tam giác BCD.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1D} = \vec{0}$

b) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$

(Chú ý: Trọng tâm của tứ diện là giao điểm các đường thẳng nối mỗi đỉnh của tứ diện với trọng tâm của mặt đối diện).

c) Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn hệ thức.

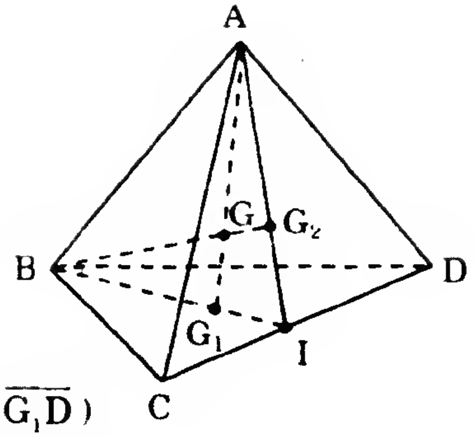
$$3\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right| = 4\left|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right|$$

(Đại học Kiến trúc Hà Nội, năm 2000)

Giải

a) Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{G_1B} = -2\overrightarrow{G_1I} \\ \overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1D} = 2\overrightarrow{G_1I} \end{cases}$

Suy ra: $\overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1D} = \vec{0}$



b) Gọi G_2 là trọng tâm giác ACD

$\Rightarrow \{G\} = AG_1 \cap BG_2$

Ta có $\overrightarrow{GA} = -3\overrightarrow{GG_1}$

Do đó: $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}$

$= \overrightarrow{GA} + (\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{G_1B})$

$+ (\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1C}) + (\overrightarrow{GG_1} + \overrightarrow{G_1D})$

$= \overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GG_1} + (\underbrace{\overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_1C} + \overrightarrow{G_1D}}_{\vec{0}}$

$= \overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GG_1} = \vec{0}$

c) Ta có:

$3|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}|$

$\Leftrightarrow 2|(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GD})|$

$= 4|(\overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{G_1B}) + (\overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{G_1C}) + (\overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{G_1D})|$

$\Leftrightarrow 3|4\overrightarrow{MG} + \underbrace{\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}}_{\vec{0}}$

$= 4|3\overrightarrow{MG_1} + \underbrace{\overrightarrow{G_1B} + \overrightarrow{G_2B} + \overrightarrow{G_1D}}_{\vec{0}}|$

$\Leftrightarrow MG = MG_1$

$\Leftrightarrow$ M thuộc mặt phẳng trung trực của đoạn GG_1.

Bài 18. Cho hình chóp đều S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a cạnh bên $SA = a\sqrt{5}$ Một mặt phẳng (P) đi qua AB và vuông goc với mặt phẳng (SCD). (P) lần lượt cắt SC và SD tại O' và D'. Tính diện tích tứ giác ABC'D'.

(Đại học nông nghiệp I, khối A, năm 2000)

Giải

Gọi I, J, O lần lượt là trung điểm của AB, CD, IJ.

Ta có: $\left.\begin{array}{l} AB \parallel (SCD) \\ AB \subset (P) \\ (P) \cap (SD) = C'D' \end{array}\right\} \Rightarrow AB \parallel C'D' \Rightarrow ABC'D'$ là hình thang.

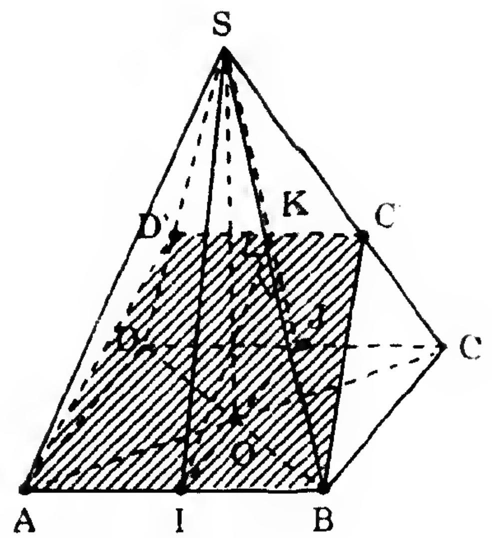
Gọi K là giao điểm của SJ và C'D'

Ta có: $AB \perp (SIJ)$

Mà $C'D' \cap AB$

$\Rightarrow C'D' \perp (SIJ)$

$\Rightarrow IK \perp C'D' \qquad (1)$



Ta lại có $\begin{cases} (P) \perp (SCD) \\ (P) \cap (SCP) = C'D' \quad (2) \\ IK \subset (P) \end{cases}$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow IK \perp (SCD)$

$$\Rightarrow \begin{cases} IK \perp SJ \\ IK \perp C'D' \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{ABC'D'} = \frac{1}{2}(AB + C'D')IK \qquad (3)$$

Bây giờ ta tính AB, C'D', IK theo a

- $AB = 2C'D' = 2a$
- $SJ^2 = SC^2 - JC^2 = (a\sqrt{5})^2 - a^2 = 4a^2$

$\Rightarrow SJ = 2a \qquad \Rightarrow JK = a$

$\Rightarrow IK^2 = IJ^2 - JK^2 = 4a^2 - a^2 = 3a^2$

$\Rightarrow IK = a\sqrt{3}$

Do đó, từ (3) cho ta $S = \frac{1}{2}(2a + a)a\sqrt{3} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

Bài 19. Trong không gian cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của các đoạn AB và CD. Xác định vị trí của I trên đoạn EF sao cho.

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$$

(Viện Đại học mở Hà Nội, khối A, năm 2000)

Giải

Ta có: $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EA}$

$\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EB}$

$+ \quad \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{FC}$

$$\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{FD}$$

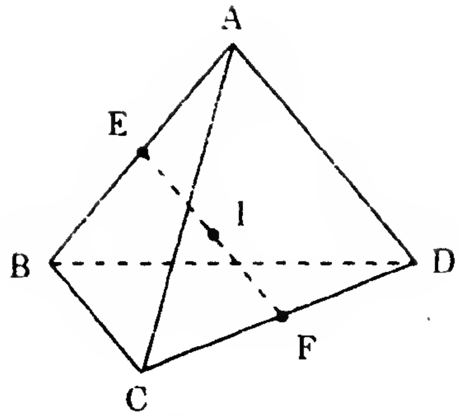
$$\Rightarrow \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}$$

$$= 2(\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF}) + \underbrace{(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EB})}_{\vec{0}}$$

$$+ \underbrace{(\overrightarrow{FC} + \overrightarrow{FD})}_{0} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow$ I trung điểm đoạn EF



Bài 20. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' với cạnh bằng a. Giả sử M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh A'D', D'C', C'C, AA'.

a) Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một mặt phẳng. Tính chu vi tứ giác MNPQ theo a

b) Tính diện tích của tứ giác MNPQ theo a

(Học viện Quan hệ Quốc tế, khối D, năm 2000)

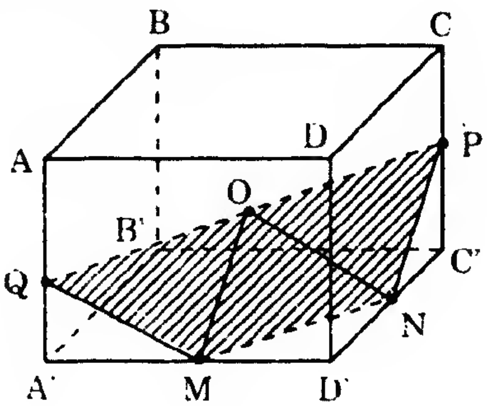
Giải

a) • Ta có: $\begin{cases} PQ \,//\, A'C' \\ MN \,//\, A'C' \end{cases}$

$\Rightarrow$ MN // PQ

$\Rightarrow$ M, N, P, Q cùng thuộc một mặt phẳng

• Ta có: $\begin{cases} PQ = A'C' = a\sqrt{2} \\ QM = MN = NP = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \end{cases}$



$\Rightarrow$ Chu vi của tứ giác MNPQ là

$$a\sqrt{2} + \frac{3a\sqrt{2}}{2} = \frac{5a\sqrt{2}}{2}$$

b) Gọi O là trung điểm cạnh PQ.

Ta có $\begin{cases} OP \,//\, MN \\ OP = MN = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow$ OPNM là hình bình hành $\Rightarrow$ OM = PN $= \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

Chứng minh tương tự: $OM = QM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Do đó tứ giác MNPQ được chia thành ba tam giác đều bằng nhau với cạnh bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy: $S_{MNPQ} = 3.S_{\Delta OMN} = 3.\frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{a\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{8}a^2$

B/ BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ÔN TẬP CUỐI NĂM

Bài 1. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (1, 3)$ biến điểm A(2, 1) thành điểm nào trong các điểm sau?

☐ a. B(4, 3) ☐ b. B(3, 4)

☐ c. B(3, 2) ☐ d. B(2, 3)

Bài 2. Trong mặt phẳng Oxy, cho parabol (P) có phương trình $x^2 = Oxy$. Hỏi parabol nào trong các parabol sau là ảnh của (P) qua phép đối xứng trục Oy?

☐ a. $y^2 = 12x$ ☐ b. $y^2 = -12x$

☐ c. $x^2 = -2xy$ ☐ d. $x^2 = 2xy$

Bài 3. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng d có phương trình $x + y - 2 = 0$. Tìm phương phương trình đường thẳng d là ảnh cua d qua phép đối xứng tâm I(1, 2)

☐ a. $x + y - 4 = 0$ ☐ b. $x - y - 4 = 0$

☐ c. $-x + y + 3 = 0$ ☐ d. $x - y + 3 = 0$.

Bài 4. Trong các phép quay sau, phép quay nào là phép đồng nhất?

☐ a. $Q(O, 12\pi)$ ☐ b. $Q(O, 7\pi)$

☐ c. $Q\left(O, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ $(k \in \mathbb{Z})$ ☐ d. $Q\left(O, -\frac{\pi}{2}\right)$

Bài 5. Cho phép vị tự V(0, k) ($k \neq 0$). Xét các biểu sau:

1. Nếu M_1 và M_2 có cùng ảnh M thì M_1 trùng M_2.
2. Nếu M biến thành M' thì M là ảnh của M' qua phép vị tự $V\left(O, \frac{1}{k}\right)$

☐ a. Cả hai phát biểu trên đều sai

☐ b. Cả hai phát biểu trên đều đúng

☐ c. Chỉ có phát biểu (2) là đúng

☐ d. Chỉ có phát biểu (2) là sai.

Bài 6. Trong mặt phẳng Oxy, cho M(2, 4). Hỏi phép đồng dạng có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O tỷ số $k = \frac{1}{2}$ và phép đối xứng qua trục Oy sẽ biến điểm M thành điểm nào trong các điểm sau đây:

☐ a. A(−1,17) ☐ b. B(−1,12)

☐ c. C(−1,7) ☐ d. D(−1,2)

Bài 7. Cho hình chóp S.ABCD với đáy ABCD là tứ giác lồi có các cạnh đối không song song. Giả sử $AC \cap BD = \{O\}$, $AD \cap BC = \{I\}$. Khi đó giao tuyến của (SAC) và (SBD) là

☐ a. AB ☐ b. SI ☐ c. SO ☐ d. SB.

Bài 8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Giả sử $M \in SB$. Mặt phẳng (ADM) cắt hình chóp S.ABCD thiết diện là hình gì?

☐ a. Hình thang ☐ b. Tam giác

☐ c. Lục giác ☐ d. Hình vuông.

Bài 9. Cho tứ diện ABCD. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và BD. IJ lần lượt là trung điểm của AB và CD. Gọi giao điểm của IJ với (CMN) là k. Tính tỷ số $\frac{IK}{KJ}$

☐ a. 1 ☐ b. 2 ☐ c. 3 ☐ d. 4.

Bài 10. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N, P, Q là các điểm trên các cạnh AB, BC, CD, DA sao cho MN và PQ cắt nhau tại I. Tâm giao tuyến của (MNP) và (ACD). Chọn câu sai:

☐ a. IP ☐ b. PQ ☐ c. PN ☐ d. IQ.

Bài 11. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang ABCD, BC // AD, BC < AD. Gọi M là trung điểm cua SD. Xác định thiết diện tạo bởi (ABM) với hình chóp:

☐ a. Tam giác ABM

☐ b. Tam giác APM (với $\{P\} = AB \cap CD$)

☐ c. Tam giác ABN (với $\{N\} = SC \cap (ABM)$)

☐ d. Tứ giác ABNM (với $\{N\} = SC \cap (ABM)$).

Bài 12. Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D'. Gọi O và O' lần lượt là tâm của hai đáy ABCD và A'B'C'D'. điểm I thuộc đoạn OO' sao cho $\frac{O'I}{OO'} = \frac{1}{4}$.

Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) (qua I và song song với AC' và B'D) hình hộp là hình gì?

☐ a. Ngũ giác ☐ b. Tứ giác

☐ c. Tam giác ☐ d. Một đáp số khác.

Bài 13. Cho tứ diện OABC. M và N lần lượt là trung điểm AB và OC. Tính $\vec{MN}$ theo các vectơ $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$.

☐ a. $\vec{MN} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$

☐ b. $\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{OC} + \frac{1}{3}\vec{OB} - \vec{OA}$

☐ c. $\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{OC} - \frac{1}{2}\vec{OA} - \frac{1}{2}\vec{OB}$.

☐ d. $\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{OC} - \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB}$.

Bài 14. Cho hình chóp S.ABCD, ABCD là hình bình hành tâm O. Điểm P thuộc cạnh SD sao cho $\frac{PD}{SD} = \frac{1}{5}$. Biểu thị $\vec{CP}$ theo ba vectơ $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OS}$.

☐ a. $\vec{CP} = \vec{OA} + \frac{2}{5}\vec{OB} - \frac{1}{5}\vec{OS}$

☐ b. $\vec{CP} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) + \frac{1}{5}\vec{OS}$

☐ c. $\vec{CP} = \vec{OA} + \frac{4}{5}\vec{OB} + \frac{1}{5}\vec{OS}$

☐ d. $\vec{CP} = \vec{OA} - \frac{4}{5}\vec{OB} + \frac{1}{5}\vec{OS}$.

Bài 15. Cho hai hình vuông ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm AD, BC, BE, AF. Hãy tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

☐ a. (ADF) // (BNP) và (CDE) // (MNPQ)

☐ b. (AMQ) // (BNP) và (BDE) // (MNQ)

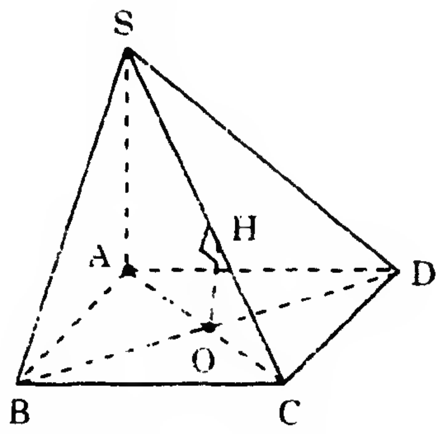
☐ c. (ADF) // (BCE) và (MNP) // (ACF)

☐ d. (ABPQ) // (CDE).

Bài 16. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA $\perp$ (ABCD) và SA = $a\sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa BD và SC. Sau đây là bài giải.

Bước 1. Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \text{ (vì ABCD là hình vuông)} \\ BD \perp SA \text{ (vì } SA \perp (ABCD)) \end{cases}$

$\Rightarrow BD \perp (SAC)$



Bước 2: Trong (SAC), kẻ OH $\perp$ SC (H $\in$ SC) (1)

Mà OH $\subset$ (SAC) và BD $\perp$ (SAC) $\Rightarrow$ BD $\perp$ OH (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ OH là đoạn vuông góc chung của BD và SC

$\Rightarrow$ OH = d(BD, SC).

Bước 3: Tính OH

Do O trung điểm của AC nên $OA = \frac{1}{2}SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Bài giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai ở đâu?

☐ a. Đúng ☐ b. Sai từ bước 1

☐ c. Sai từ bước 2 ☐ d. Sai từ bước 3.

Bài 17. Cho hình lập phương ABCD. A'B'C'D' có cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD' và B'C.

☐ a. $\frac{a}{6}$ ☐ b. $\frac{a\sqrt{2}}{6}$ ☐ c. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$ ☐ d. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Bài 18. Cho hình chóp đều S.ABC có cạnh đáy bằng a và đường cao SO = $\frac{a}{2}$. Tính SB?

☐ a. $\frac{a\sqrt{21}}{6}$ ☐ b. $\frac{a\sqrt{19}}{6}$ ☐ c. $\frac{a\sqrt{17}}{6}$ ☐ d. $\frac{a\sqrt{15}}{6}$.

Bài 19. Cho hình chóp S.ABCD và O là hình chiếu của S lên đáy ABCD. Câu nào sau đây sai?

☐ a. Nếu SA = SB = SC = SD thì O là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác ABCD.

☐ b. S.ABCD là hình chóp đều thì O là giao điểm của AC và BD.

☐ c. Nếu ABCD là hình chữ nhật và O là giao điểm của AC và BD thì S cách đều bốn điểm A, B, C, D.

☐ d. Nếu ABCD là hình thoi và O là tâm của ABCD thì S.ABCD là hình chóp đều.

Bài 20. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, AB = BC = a, AD = 2a, SA ⊥ (ABCD) và SA = $a\sqrt{2}$. Tính góc giữa (SCD) và (ABCD).

☐ a. 30^0 ☐ b. 45^0 ☐ c. 60^0 ☐ d. 75^0.

Bài 21. Cho lăng trụ tứ giác đều ABCD. A'B'C'D' có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng b. Tính khoảng cách từ C đến mặt phẳng (BDC').

☐ a. $\dfrac{ab}{\sqrt{3b^2+a^2}}$ ☐ b. $\dfrac{ab}{\sqrt{3a^2+b^2}}$

☐ c. $\dfrac{ab}{\sqrt{2b^2+a^2}}$ ☐ d. $\dfrac{ab}{\sqrt{2a^2+b^2}}$.

Bài 22. Cho hình chóp S.ABC có AB = SC = a và tất cả các cạnh còn lại bằng b. Gọi E và F lần lượt là trung điểm AB và SC. Tính EF theo a và b.

☐ a. $\sqrt{b^2-\dfrac{a^2}{2}}$ ☐ b. $\sqrt{b^2-\dfrac{a^2}{5}}$

☐ c. $\sqrt{a^2-\dfrac{b^2}{2}}$ ☐ d. $\sqrt{a^2-\dfrac{b^2}{5}}$.

ĐÁP ÁN

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Đáp án	b	d	a	a	b	d	c	a	b	c	d
Câu	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Đáp án	a	c	d	a	d	c	a	d	b	c	a

Phụ lục 1: Một số công thức quan trọng trong tam giác cần nhớ.

Cho ΔABC, ta ký hiệu:

- A, B, C: Lần lượt là các góc BAC, ABC, ACB
- a, b, c: Độ dài các cạnh đối diện A, B, C tương ứng.
- h_a, h_b, h_c: Độ dài các đường cao xuất phát từ A, B, C tương ứng.
- m_a, m_b, m_c: Độ dài các đường trung tuyến xuất phát từ A, B, C tương ứng.
- l_a, l_b, l_c: Độ dài các đường phân giác trong xuất phát từ A, B, C tương ứng.
- l'_a, l'_b, l'_c: Độ dài các đường phân giác ngoài (nếu có) xuất phát từ A, B, C tương ứng
- r_a, r_b, r_c: Độ dài các bán kính đường tròn bàng tiếp các góc A, B, C tương ứng.
- R, r: Độ dài các bán kính đường tròn ngoại, nội tiếp tương ứng.
- S: Diện tích tam giác.
- (p): Nửa chu vi tam giác.

1. *Định lí hàm sin*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2R\sin A \\ b = 2R\sin B \\ c = 2R\sin C \end{cases}$$

2. *Định lí hàm cosin*

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca.\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \\ \cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \end{cases}$$

Hệ quả 1:

- A nhọn $\left(0 < A < \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$
- A vuông $\left(A = \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$ (Định lí Pitago)
- A tù $\left(\frac{\pi}{2} < A < \pi\right) \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$

Chứng minh

- A nhọn $\Leftrightarrow \cos A > 0 \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} > 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 > a^2$
- A vuông $\Leftrightarrow \cos A = 0 \Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2$
- A tù $\Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} < 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 < a^2$

Hệ quả 2:

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 4S\cot gA \\ b^2 = c^2 + a^2 - 4S\cot gB \\ c^2 = a^2 + b^2 - 4S\cot gC \end{cases}$$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 4S(\text{cotg}A + \text{cotg}B + \text{cotg}C)$

Chứng minh

Ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = b^2 + c^2 - 4S\frac{\cos A}{\sin A}$

$= b^2 + c^2 - 4S.\text{cotg}A$

- Chứng minh tương tự:

$$+\begin{array}{l} b^2 = c^2 + a^2 - 4S\cot gB \\ c^2 = a^2 + b^2 - 4S\cot gC \end{array}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 4S(\cot gA + \cot gB + \cot gC)$$

Hệ quả 3:

$$\begin{cases} a^2 = (b - c)^2 + 4S\text{tg}\frac{A}{2} \\ b^2 = (c - a)^2 + 4S\text{tg}\frac{B}{2} \\ c^2 = (a - b)^2 + 4S\text{tg}\frac{C}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + 4S\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)$$

Chứng minh

Ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = (b^2 + c^2 - 2bc) + 2bc - 2bc\cos A$

$$= (b-c)^2 + 2bc(1 - \cos A)$$

$$= (b-c)^2 + 4\left(\frac{1}{2}bc\sin A\right)\frac{1-\cos A}{\sin A}$$

$$= (b-c)^2 + 4S.\frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$= (b-c)^2 + 4S\operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

- Chứng minh tương tự:

$$b^2 = (c-a)^2 + 4S\operatorname{tg}\frac{B}{2}$$

$$+$$

$$c^2 = (a-b)^2 + 4S\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + 4S\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \operatorname{tg}\frac{B}{2} + \operatorname{tg}\frac{C}{2}\right)$$

3. Định lí hàm tang

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}} = \operatorname{tg}\frac{A-B}{2}.\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}} = \operatorname{tg}\frac{B-C}{2}.\operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

$$\frac{c-a}{c+a} = \frac{\operatorname{tg}\frac{C-A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{C+A}{2}} = \operatorname{tg}\frac{C-A}{2}.\operatorname{tg}\frac{B}{2}$$

4. *Công thức về diện tích*

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c = \frac{1}{2}bc.\sin A = \frac{1}{2}ca.\sin B = \frac{1}{2}ab.\sin C$$

$$= pr = \frac{abc}{4R} = (p-a)r_a = (p-c)r_c$$

$$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (Công thức Hêrông)}$$

$$= \sqrt{rr_ar_br_c} \quad (1)$$

$$= p^2 tg\frac{A}{2}.tg\frac{B}{2}.tg\frac{C}{2} = 2R^2\sin A.\sin B.\sin C \quad (2)$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)} \quad (3)$$

Chú ý: Các công thức (1), (2), (3) khi "đi thi đại học" phải chứng minh lại (mới được dùng).

Chứng minh

- $S = pr = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$

$\Rightarrow \quad S^4 = p(p-a)(p-b)(p-c)rr_ar_br_c = S^2.rr_ar_br_c$

$\Rightarrow \quad S = \sqrt{rr_ar_br_c}$

$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}(2R\sin B)(2R\sin C)\sin A$ (Do định lí hàm sin)

$= 2R^2\sin A.\sin B.\sin C.$

- $S = pr$

và $\quad r = (p-a)tg\frac{A}{2} = (p-b)tg\frac{B}{2} = (p-c)tg\frac{C}{2}$

$\Rightarrow \quad S^3 = p^3.r.r.r = p^3(p-a)(p-b)(p-c)\ tg\frac{A}{2}.\ tg\frac{B}{2}.\ tg\frac{C}{2}$

$= p^2.S^2.\ tg\frac{A}{2}.\ tg\frac{B}{2}.\ tg\frac{C}{2}$

$\Rightarrow \quad S = p^2.\ tg\frac{A}{2}.\ tg\frac{B}{2}.\ tg\frac{C}{2}$

- Ta có: $S^2 = \left(\frac{1}{2}bc.\sin A\right)^2 = \frac{1}{4}b^2c^2.\sin^2 A = \frac{1}{4}b^2c^2(1-\cos^2 A)$

$$= \frac{1}{4}b^2c^2\left[1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2\right] \text{ (Do định lí hàm cosin)}$$

$$= \frac{1}{16}[(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2]$$

$$= \frac{1}{16}[4b^2c^2 - (b^4 + c^4 + a^4 + 2b^2c^2 - 2a^2b^2 - 2c^2a^2)]$$

$$= \frac{1}{16}[2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)]$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{4}\sqrt{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}$$

5. Công thức về đường cao

$$\begin{cases} h_a = \dfrac{2S}{a} = \dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a} \\ h_b = \dfrac{2S}{b} = \dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{b} \\ h_c = \dfrac{2S}{c} = \dfrac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c} \end{cases}$$

Hệ quả: $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{r}$

Chứng minh

Ta có: $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{a}{2S} + \dfrac{b}{2S} + \dfrac{c}{2S}$

$$= \frac{a + b + c}{2S} = \frac{2p}{2S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}.$$

6. Công thức về trung tuyến

$$\begin{cases} m_a^2 = \dfrac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} = \dfrac{b^2 + c^2 + 2bc\cos A}{4} \\ m_b^2 = \dfrac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4} = \dfrac{c^2 + b^2 + 2ca\cos B}{4} \\ m_c^2 = \dfrac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} = \dfrac{a^2 + b^2 + 2ab\cos C}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

Hệ quả:

- A nhọn $\Leftrightarrow$ $2m_a > a$
- A vuông $\Leftrightarrow$ $2m_a = a$
- A tù $\Leftrightarrow$ $2m_a < a$

Chứng minh

Ta có: $4m_a^2 - a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2 - a^2$

$$= 2(b^2 + c^2 - a^2) = 2(2bc.\cos A)$$

$$= 4bc.\cos A.$$

Do đó:
- A nhọn $\Leftrightarrow \cos A > 0 \Leftrightarrow 4m_a^2 - a^2 > 0$
  $\Leftrightarrow 2m_a > a$
- A vuông $\Leftrightarrow \cos A = 0 \Leftrightarrow 4m_a^2 - a^2 = 0$
  $\Leftrightarrow 2m_a = a$
- A tù $\Leftrightarrow \cos A < 0 \Leftrightarrow 4m_a^2 - a^2 < 0$
  $\Leftrightarrow 2m_a < a.$

7. Công thức về phân giác trong

$$\begin{cases} l_a = \dfrac{2bc.\cos\dfrac{A}{2}}{b+c} = \dfrac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)} \\ l_b = \dfrac{2ca.\cos\dfrac{B}{2}}{c+a} = \dfrac{2}{c+a}\sqrt{cap(p-b)} \\ l_c = \dfrac{2ab.\cos\dfrac{C}{2}}{a+b} = \dfrac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)} \end{cases}$$

8. Công thức về phân giác ngoài

$$\begin{cases} l'_a = \dfrac{2bc.\sin\dfrac{A}{2}}{|b-c|} = \dfrac{2}{|b-c|}\sqrt{bc(p-b)(p-c)} \ (\text{với } b \neq c) \\ l'_b = \dfrac{2ca.\sin\dfrac{B}{2}}{|c-a|} = \dfrac{2}{|c-a|}\sqrt{ca(p-c)(p-a)} \ (\text{với } c \neq a) \\ l'_c = \dfrac{2ab.\sin\dfrac{C}{2}}{|a-b|} = \dfrac{2}{|a-b|}\sqrt{ab(p-a)(p-b)} \ (\text{với } a \neq b) \end{cases}$$

9. Công thức về bán kính

- Bán kính đường tròn ngoại tiếp:

$$R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{b}{2\sin B} = \frac{c}{2\sin C}$$

$$= \frac{abc}{4S} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

- Bán kính đường tròn nội tiếp:

$$r = (p-a)\text{tg}\frac{A}{2} = (p-b)\text{tg}\frac{B}{2} = (p-c)\text{tg}\frac{C}{2} = \frac{S}{p}$$

$$= \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

- Bán kính đường tròn bàng tiếp:

$$\begin{cases} r_a = p\text{tg}\dfrac{A}{2} = \dfrac{S}{p-a} = \sqrt{\dfrac{p(p-b)(p-c)}{p-a}} \\ r_b = p\text{tg}\dfrac{B}{2} = \dfrac{S}{p-b} = \sqrt{\dfrac{p(p-c)(p-a)}{p-b}} \\ r_c = p\text{tg}\dfrac{C}{2} = \dfrac{S}{p-c} = \sqrt{\dfrac{p(p-a)(p-b)}{p-c}} \end{cases}$$

Hệ quả 1: $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{1}{r}$

Chứng minh

Ta có: $\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S}$

$$= \frac{3p-(a+b+c)}{S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r}$$

Hệ quả 2: $\text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2} = \frac{p}{r}$

Chứng minh

Ta có: $r = (p-a)\text{tg}\frac{A}{2} = (p-b)\text{tg}\frac{B}{2} = (p-c)\text{tg}\frac{C}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cot g\dfrac{A}{2} = \dfrac{p-a}{r} \\ \cot g\dfrac{B}{2} = \dfrac{p-b}{r} \\ \cot g\dfrac{C}{2} = \dfrac{p-c}{r} \end{cases} \Rightarrow \text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2} = \frac{p}{r}$$

Hệ quả 3: $\text{cotg}\dfrac{A}{2} + \text{cotg}\dfrac{B}{2} + \text{cotg}\dfrac{C}{2} = \text{cotg}\dfrac{A}{2}.\text{cotg}\dfrac{B}{2}.\text{cotg}\dfrac{C}{2}$

Chứng minh

Ta có: $\text{cotg}\dfrac{A}{2}.\text{cotg}\dfrac{B}{2}.\text{cotg}\dfrac{C}{2} = \dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{r^3}$

$$= \frac{S^2}{p.r^3} = \frac{(pr)^2}{pr^3} = \frac{p}{r}$$

Cùng với hệ quả 2 suy ra:

$$\text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2} = \text{cotg}\frac{A}{2}.\text{cotg}\frac{B}{2}.\text{cotg}\frac{C}{2} = \frac{p}{r}$$

Chú ý: Hệ quả 3 có thể chứng minh trực tiếp như sau:

Từ $A + B + C = \pi \Rightarrow \dfrac{A}{2} + \dfrac{B}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{C}{2}$

$$\Rightarrow \text{cotg}\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\cot g\frac{A}{2}.\cot g\frac{B}{2} - 1}{\cot g\frac{A}{2} + \cot g\frac{B}{2}} = \text{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{\cot g\frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow \text{cotg}\frac{A}{2} + \text{cotg}\frac{B}{2} + \text{cotg}\frac{C}{2} = \text{cotg}\frac{A}{2}.\text{cotg}\frac{B}{2}.\text{cotg}\frac{C}{2}$$

10. Công thức về hình chiếu

$$\begin{cases} a = b.\cos C + c.\cos B = r\left(\cot g\dfrac{B}{2} + \cot g\dfrac{C}{2}\right) \\ b = c.\cos A + a.\cos C = r\left(\cot g\dfrac{C}{2} + \cot g\dfrac{A}{2}\right) \\ c = a.\cos B + b.\cos A = r\left(\cot g\dfrac{A}{2} + \cot g\dfrac{B}{2}\right) \end{cases}$$

11. Các công thức khác

• *Công thức 1:* $\begin{cases} |b - c| < a < b + c \\ |c - a| < b < a + c \\ |a - b| < c < a + b \end{cases}$

• *Công thức 2:* $\begin{cases} A + B + C = \pi \\ 0 < A, B, C < \pi \end{cases}$

• *Công thức 3:*

* $0 < a \le b \le c \quad \Leftrightarrow 0 < A \le B \le C < \pi$

$\Leftrightarrow 0 < \sin A \le \sin B \le \sin C \le 1$

$\Leftrightarrow -1 < \cos C \le \cos B \le \cos A < 1$

* $\sin A = \sin(B + C)$...

* $\cos A = -\cos(B + C)$...

* $\text{tg}A = -\text{tg}(B + C)$... (với $A \ne \frac{\pi}{2}$)...

* $\text{cotg}A = -\text{cotg}(B + C)$...

* $\sin\frac{A}{2} = \cos\frac{B + C}{2}$...

* $\cos\frac{A}{2} = \sin\frac{B + C}{2}$...

* $\text{tg}\frac{A}{2} = \text{cotg}\frac{B + C}{2}$...

* $\text{cotg}\frac{A}{2} = \text{tg}\frac{B + C}{2}$...

Hệ quả: $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$

Chú ý: Đây là đề thi tuyển vào lớp 10 Trường chuyên Lê Hồng Phong TPHCM năm 1998, đề thi Đại Học DL Văn Lang năm 1995 và Đại học Đà Nẵng (khối D) năm 1997.

Ta có $\begin{cases} a < b + c \\ b < c + a \\ c < a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 < ab + ca \\ b^2 < bc + ab \\ c^2 < ca + bc \end{cases}$

$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$

Phụ lục 2: Diễn đàn dạy học toán

VỀ CHƯƠNG TRÌNH VÀ SÁCH GIÁO KHOA MÔN HÌNH HỌC LỚP 11 NÂNG CAO

Bài viết sau đây đề cập đến một vài nét về chương trình SGK môn hình học 11.

I. Nội dung chương trình hình học lớp 11 nâng cao.

Chương trình hình học lớp 11 được phân thành ba chương.

Chương I nói về các phép dời hình và các phép đồng dạng trong mặt phẳng. Kết thúc chương này cũng là kết thúc phần hình học phẳng mà học sinh đã được học từ cấp THCS. Học sinh sẽ được làm quen với một số khái niệm thường gặp không chỉ trong toán học mà còn trong thực tế như phép tịnh tiến, phép đối xứng..., phép vị tự, hình có trục đối xứng. Ngoài ra học sinh phải hiểu được thế nào là hai hình bằng nhau và hai hình đồng dạng.

Tiếp theo là phần Hình học không gian bao gồm hai chương: Chương 2 nói về quan hệ song song và Chương 3 nói về quan hệ vuông góc trong không gian. Ở cuối cấp THCS học sinh đã bước đầu làm quen với một số khái niệm của hình học không gian bằng cách mô tả trực quan trên các mô hình cụ thể. Ở lớp 11 các khái niệm đó được trình bày một cách hệ thống và có chứng minh tương đối đầy đủ, chặt chẽ.

Về các hình trong không gian, ở lớp 11 chỉ giới thiệu hai loại quen thuộc: đó là hình lăng trụ, hình chóp và các trường hợp đặc biệt của chúng. Về các hình đa diện nói chung và mặt tròn xoay, đặc biệt là mặt cầu mặt trụ, mặt nón sẽ được giới thiệu tiếp tục ở lớp 12.

Hai chủ đề quan trọng cũng được đề cập một cách chi tiết là khoảng cách và góc.

II. Yêu cầu về mức độ chương trình

1. Mới nhìn qua, các nội dung chương trình cũng giống như trước đây, và như vậy có vẻ như không giảm tải được bao nhiêu so với chương trình cũ. Sự thật là về các chương mục, ta không thể bỏ được một nội dung nào hết.

Các khái niệm về phép dời hình và phép đồng dạng đều là những kiến thức cần có cho học sinh bậc phổ thông, cả về mặt toán học và thực tế. Trong đời sống hàng ngày chúng ta luôn gặp những hình bằng nhau hay những hình đồng dạng với nhau. Chí ít thì học sinh phải hiểu thế nào là hai hình đồng dạng một cách chính xác chứ không phải một cách mơ hồ kiểu như: hai hình đồng dạng là hai hình có hình dạng giống nhau.

Học sinh bậc THPT phải được làm quen với hình học không gian, chính là cái không gian mà chúng ta đang sống trong đó. Như vậy thì chủ đề về quan hệ song song nhất định phải có, và trong chủ đề đó không thể không có các đề mục như: hai đường thẳng song song, đường thẳng song song với mặt phẳng, hai mặt phẳng song song. Thêm vào đó cũng không thể bỏ phép chiếu song song bởi vì nó cần thiết để định nghĩa hình biểu diễn và vẽ các hình biểu diễn... Tương tự như vậy với chủ đề liên quan đến vuông góc.

2. Như vậy việc giảm tải chỉ được thể hiện trong việc trình bày chi tiết các vấn đề về lí thuyết và mức độ dễ hơn của các bài tập.

Về lí thuyết, SGK bỏ qua những trình bày thật chặt chẽ bị phê phán là "hàn lâm". Có thể nêu một ví dụ sau đây:

Trong SGK, sự bằng nhau của các hình được định nghĩa như sau: "Hai hình gọi là bằng nhau nếu có phép dời hình biến hình này thành hình kia". Như vậy nếu có phép dời hình f biến hình H thành hình H' thì ta gọi hai hình H và H' là bằng nhau. Việc dùng thuật ngữ bằng nhau trong trường hợp này là một sự lạm dụng tế nhị. Nếu đòi hỏi chính xác thì phải trình bày như sau:

Trước hết nêu định nghĩa: Hình H gọi là bằng hình H' nếu có phép dời hình biến hình H thành H'. Sau đó ta chứng minh rằng quan hệ "bằng" nói trên là một quan hệ tương đương, tức là:

i) Mọi hình H đều bằng chính nó

ii) Nếu hình H bằng hình H' thì hình H' bằng hình H.

iii) Nếu hình H bằng hình H' và hình H' bằng hình H" thì hình H bằng hình H".

Ba tính chất trên có thể chứng minh dễ dàng nếu biết rằng tập hợp các phép dời hình làm thành một nhóm (phép đồng nhất là phép dời hình, nghịch đảo của phép dời hình là phép

dời hình, hợp thành của hai phép dời hình là phép dời hình). Vì có tính chất ii) ta có thể nói rằng hai hình H và H' bằng nhau.

Nhưng khái niệm về nhóm các phép dời hình không được (và không thể) nêu ra cho học sinh và bởi thế chúng ta đành chấp nhận một cách trình bày không chặt chẽ như đã làm trong SGK.

Qua ví dụ trên ta có thể thấy rằng SGK đã bỏ qua nhiều khía cạnh "hàn lâm" để trình bày khái niệm bằng nhau mặc dầu không hoàn toàn chặt chẽ, nhưng học sinh có thể chấp nhận được.

Ngoài ra, nếu gặp hiện tượng quá hiển nhiên, mà học sinh nào cũng thấy rõ thì SGK cũng đơn giản bớt mà không nêu chứng minh cho khỏi rườm rà. Lấy ví dụ: "Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song" là một mệnh đề khá hiển nhiên có thể minh họa bằng những hình ảnh trực quan (các cột đèn cùng vuông góc với mặt sân vận động), bởi vậy không cần nêu chứng minh cho mất thì giờ. Chú ý rằng mệnh đề trên có thể xem như là tương tự của mệnh đề trong hình học phẳng: "Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song". Tuy nhiên sự suy luận tương tự bao giờ cũng còn dao hai lưỡi, nếu không cẩn thận thì dễ mắc sai lầm, cho nên SGK đã chú ý học sinh bằng câu hỏi kiểu như: "Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì có song song hay không?"

Một ví dụ khác: Việc chứng minh định lí về sự bảo tồn tỉ số của hai đoạn thẳng song song qua phép chiếu song song không mấy khó khăn nhưng khá dài dòng vì phải chia ra khá nhiều trường hợp. SGK chỉ minh họa định lí đó trong một trường hợp phổ biến.

3. Hệ thống các bài tập là nơi có thể giảm tải khá nhiều. Số lượng các bài tập trong SGK không nhiều như trước và cũng không khó bằng. Chúng tôi mong rằng các giáo viên sẽ không đưa thêm nhiều bài tập khó hơn các bài tập SGK. Chúng tôi có đề nghị một số bài kiểm tra (15' hoặc 45') trong SGV để các giáo viên tham khảo, qua đó các giáo viên thấy được mức độ mà chúng ta đòi hỏi học sinh sau mỗi chương.

Lấy ví dụ về hệ thống các bài tập liên quan đến phép dời hình và phép đồng dạng. SGK chỉ đưa ra những bài tập để củng

cố các tính chất của các phép dời hình và đồng dạng đã học. Các bài tập vận dụng các phép đó để giải toán đặc biệt là các bài toán dựng hình và quỹ tích được giảm nhẹ đến tối thiểu.

Có nhiều bài tập rất hay (và do đó rất khó) về hình tứ diện và hình hộp cũng không đưa ra cho học sinh. Chẳng hạn các bài tập về tứ diện trực tâm, tứ diện gần đều... Nhìn chung các bài tập chủ yếu là để học sinh rèn luyện ở các mức độ: nhận biết và thông hiểu là chủ yếu.

Cũng có một số bài tập ở mức độ vận dụng và sáng tạo nhưng không nhiều.

Những bài tập khó hơn có thể tìm trong cuốn Bài tập Hình học 11.

II. Một số vấn đề về phương pháp giảng dạy

Chúng tôi chỉ xin lưu ý một số điểm sau đây:

1. SGK có nêu lên những Câu hỏi và Hoạt động. Các câu hỏi nhằm định hướng cho học sinh chú ý vào một khía cạnh nào đó trong quá trình nhận thức. Có thể là để học sinh nhớ lại một kiến thức đã biết có liên quan đến bài mới, có thể là để học sinh hiểu thêm một chi tiết nào đó trong vấn đề đang xét, có thể là để lật lại vấn đề,..., các câu hỏi như thế không quá khó, nhưng nếu động viên học sinh suy nghĩ và trả lời thì chắc hẳn là có lợi.

   Các Hoạt động nhằm yêu cầu học sinh phải thực sự động não và làm việc trên giấy nháp. Có thể là yêu cầu học sinh tính toán đúng một kết quả nào đó, học yêu cầu học sinh suy ra một hệ quả từ một định lí vừa nêu, hoặc yêu cầu học sinh áp dụng công thức đã có vào một trường hợp cụ thể... Các hình thức Hoạt động có thể là cá nhân, từng nhóm trao đổi, hay toàn lớp thảo luận. Đây cũng là hình thức giúp học sinh tập trung vào bài học và cùng xây dựng bài học. Chúng tôi chỉ xin nhắc lại rằng, các Câu hỏi và Hoạt động trong SGK chỉ mang tính gợi ý, hoàn toàn không phải là áp đặt, bắt mọi thầy giáo phải theo. Tùy theo trình độ học sinh trong lớp mình, thầy giáo có thể đưa ra những Câu hỏi và Hoạt động thích hợp hơn.

2. Nội dung trình bày trong SGK được chia thành hai phần: phần chính và phần phụ (ngay trong mỗi trang sách). Phần chính được in bắt đầu từ cột thứ nhất của trang sách, thường bao gồm

các định nghĩa, các tính chất, các định lí hoặc các công thức, theo các kiểu chữ khác nhau: in đậm, in nghiêng, hoặc chữ bình thường, có đóng khung hoặc không đóng khung. Phần phụ được in lùi vào bên phải 4 cột so với lề trái, thường bao gồm: Các lời dẫn dắt, lời đặt vấn đề, các câu hỏi, các Hoạt động, các chứng minh của định lí, các ví dụ minh họa, các bài tập áp dụng. Như vậy có thể hình dung rằng khi bỏ phần phụ đi thì còn lại phần chính là tóm tắt những điều cần nhớ của bài học.

Với cách trình bày như vậy chúng tôi dụng ý là học sinh ít phải ghi chép, mà tập trung thì giờ để nghe giáo viên giảng, để suy nghĩ là trả lời các câu hỏi, để làm việc theo yêu cầu của các hoạt động. Chúng ta không nên làm mất thì giờ của học sinh một cách vô ích khi bắt họ chép nguyên văn định lí, tính chất, thậm chí cả chứng minh... vào vở của mình vì tất cả điều đó đã có trong SGK.

(Lược trích tạp chí "Toán học về tuổi trẻ" số 362, năm 2007 của tác giả Văn Như Cương).

MỤC LỤC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội

Điện thoại: (04) 9724852; (04) 9724770; Fax: (04) 9714899

Chịu trách nhiệm xuất bản:

Giám đốc	: PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập	: NGUYỄN BÁ THÀNH
Biên tập	: Hải Đăng
Biên tập tái bản	: NS. Hồng Ân
Sửa bài	: NS. Hồng Ân
Sửa bài tái bản	: NS. Hồng Ân
Chế bản	: Thế Anh
Trình bày bìa	: Ngọc Anh

CÁC CHỦ ĐỀ HÌNH HỌC 11
(Tự luận và trắc nghiệm)

Mã số: 1L-281 ĐH2007

In 2.000 cuốn, khổ 16 x 24cm. Tại Công ty TNHH in Bao bì Phong Tân.

Số xuất bản: 840-2007/CXB/20-130/ĐHQGHN, ngày 16/10/2007.

Quyết định xuất bản số: 643 LK/XB

In xong và nộp lưu chiểu quý IV năm 2007.